XXXIV Olimpíada Cearense de Matemática
Nível 1 - Sexto e Sétimo Anos

Reservado para a correção

Prova		Probl. 1	Probl. 2	Probl. 3	Probl. 4	Probl. 5	Total
# 0	**Nota**						

Instruções e Regulamento:

1. Identifique a prova somente no local indicado da capa.
2. Use o verso de cada folha como rascunho.
3. Verifique se sua prova está completa. A prova consta de 5 (cinco) problemas.
4. Somente serão consideradas as soluções escritas no espaço reservado para tal. Para escrevê-las, utilize caneta azul ou preta.
5. Cada problema vale 10 pontos.
6. O tempo de prova é de **4h**. Nenhum candidato poderá sair antes de completados 30 minutos de prova.
7. Não serão concedidas revisões de prova.
8. As soluções e a classificação serão divulgadas oficialmente no sítio **www.mat.ufc.br/ocm**, a partir do dia 06/12/2014.
9. Serão classificados os 20 primeiros colocados de cada nível.
10. Para fins de classificação, serão adotados os seguintes critérios de desempate:
    (a) maior número de problemas com pontuação ≥ 8;
    (b) maior nota no problema 5;
    (c) maior nota no problema 4;
    (d) maior nota no problema 3.

Identificação: Prova #0

Nome:	
Endereço:	
E-mail:	**Telefone:**
Escola:	**Série:**

Problema 1. José escreveu dois números em uma folha de papel, cada um deles com dois algarismos. Em seguida, ele observou que a soma dos algarismos do primeiro número era igual a um terço do segundo, enquanto que a diferença entre o dobro do primeiro deles e o triplo do segundo era igual a seis. Encontre, com justificativa, os dois números que José escreveu.

Solução. Se A e B denotam, respectivamente, o primeiro e o segundo números que José escreveu, e C denota a soma dos algarismos de A, então $C = B/3$ e $2A - 3B = 6$. A segunda igualdade garante que A é um múltiplo de 3; mas, como um número é múltiplo de 3 se, e só se, a soma de seus algarismos é um múltiplo de 3, concluímos que C também é um múltiplo de 3. Agora, como $B = 3C$, segue que B é um múltiplo de 9. Por outro lado, a segunda igualdade também garante que B é par, de forma que B, sendo múltiplo de 2 e de 9, é múltiplo de 18. Portanto, $B = 18$, 36, 54, 72 ou 90; mas, como $C = B/3$ e $A = (3B + 6)/2$, temos as possibilidades descritas na tabela abaixo:

B	18	36	54	72	90
A	30	57	84	111	138
C	6	12	18	24	30

Por fim, uma vez que C é a soma dos algarismos de A, a única possibilidade é que sejam $A = 57$ e $B = 36$. $\square$

Problema 2. Duas mil e quatorze pessoas estão sentadas ao redor de uma mesa redonda. Sabe-se que a altura de cada uma das pessoas sentadas ao redor da mesa é a média aritmética das alturas de suas duas vizinhas. Prove que todas as pessoas sentadas ao redor da mesa têm uma mesma altura.

Solução 1. Dentre as pessoas sentadas na mesa, escolha uma tal que não haja ninguém maior do que ela, e denote por h sua altura. Se a e b são as alturas de suas vizinhas, temos $h \geq a, b$. Por outro lado, a condição do problema garante que $h = \frac{a+b}{2}$. Logo,

$$a, b \leq h = \frac{a+b}{2} \leq \frac{h+h}{2} = h,$$

de forma que $a = b = h$. Agora, seja c a altura da outra vizinha da pessoa cuja altura chamamos inicialmente de a. Argumentando de maneira análoga à acima, concluímos que $c = h = a$. Por fim, prosseguindo dessa forma, mostramos que todas as 2014 pessoas têm uma mesma altura. □

Solução 2. Denote por $P_1, P_2, \ldots, P_{2014}$, em ordem horária, as pessoas sentadas ao redor da mesa e denote por a_i a altura de P_i, $\;i = 1, 2, \ldots, 2014$.
Suponha que $a_1 > a_2$. Temos

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2a_2 - a_1 = (a_2 - a_1) + a_2 < a_2 \\
a_4 &= 2a_3 - a_2 = (a_3 - a_2) + a_3 < a_3 \\
&\vdots \\
a_{2014} &= 2a_{2014} - a_{2013} = (a_{2014} - a_{2013}) + a_{2014} < a_{2013}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_{2014}.$$

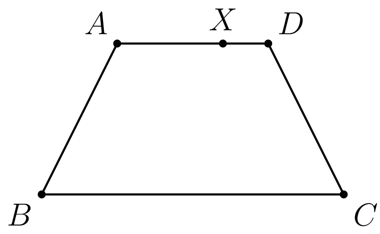
Assim,

$$2a_{2014} = a_1 + a_{2013} > 2a_{2014},$$

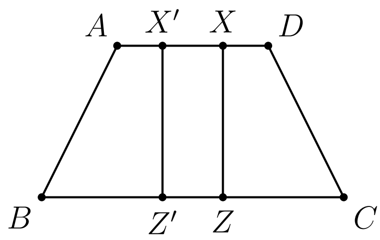
um absurdo. Logo, não se pode ter $a_1 > a_2$. Um raciocínio inteiramente análogo mostra que não se pode ter $a_1 < a_2$. Logo, $a_1 = a_2$.
Como P_1 foi escolhido de forma aleatória, provamos na verdade que a altura de qualquer pessoa coincide com a altura do seu vizinho da esquerda. Logo, todas as pessoas sentadas ao redor da mesa têm uma mesma altura.

□

Problema 3. O quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo é tal que as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} > \overline{AD}$. Se X é um ponto marcado arbitrariamente sobre o lado AD, explique, com justificativa, como escolher um ponto Y sobre o lado BC tal que a reta $\overleftrightarrow{XY}$ divida $ABCD$ em dois quadriláteros de áreas iguais.

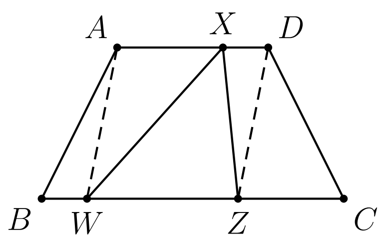


Solução 1. Marque o ponto X' sobre o lado AD, tal que $\overline{AX'} = \overline{DX}$. Em seguida, marque os pontos Z e Z' sobre o lado BC, tais que $\overleftrightarrow{XZ}, \overleftrightarrow{X'Z'} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Como $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$, temos $\overleftrightarrow{XZ}, \overleftrightarrow{X'Z'} \perp \overleftrightarrow{BC}$, de forma que $XX'Z'Z$ é um retângulo. Também, os quadriláteros $AX'Z'B$ e $DXZC$ são congruen-



tes, de forma que têm áreas iguais; portanto, basta escolher, sobre o segmento ZZ', o ponto Y tal que $\overleftrightarrow{XY}$ divida o retângulo $XX'Z'Z$ em duas figuras de áreas iguais. Mas, como $\overleftrightarrow{XZ'}$ divide tal retângulo em duas figuras de áreas iguais, basta tomar $Y = Z'$. □

Solução 2. Marque pontos W e Z sobre o lado BC de tal forma que $\overline{BW} = \overline{DX}$ e $\overline{CZ} = \overline{AX}$. Então, os quadriláteros $AXWB$ e $DXZC$ têm áreas iguais (pois os pares de triângulos ABW, DXZ e AXW, CZD têm bases e alturas iguais). Portanto, é suficiente traçar, pelo ponto X, uma



reta que divida o triângulo XWZ em dois outros triângulos, de áreas iguais. Ora, tal reta é a reta XY, onde Y é o ponto médio do segmento WZ. □

Problema 4. Considere o jogo de dois jogadores cujas regras são explicadas a seguir. No início, tem-se uma caixa contendo 2014 bolas de gude e cada jogador possui uma sacola contendo 100 bolas de gude. Cada jogador, na sua vez de jogar, escolhe uma das duas ações a seguir (se apenas uma das ações é possível, ele escolhe tal ação):

(i) Retirar 11 bolas de gude da sua sacola e colocar tais bolas de gude na caixa (desde que haja pelo menos 11 bolas de gude na sua sacola).

(ii) Retirar 13 bolas de gude da caixa e colocar tais bolas de gude em sua sacola (desde que haja pelo menos 13 bolas de gude na caixa).

Um jogador é declarado vencedor se, após sua jogada, ou houver 2015 bolas de gude na caixa ou o outro jogador não conseguir mais jogar (um jogador não consegue jogar se houver menos de 11 bolas de gude em sua sacola e menos de 13 bolas de gude na caixa). Mostre que o primeiro jogador possui uma estratégia para ganhar o jogo, independentemente de como o segundo jogador faça suas jogadas.

Solução. Chamemos o primeiro a jogar de P e o segundo a jogar de S.

Em sua primeira jogada, P escolhe a ação (i). De sua segunda jogada até sua sexta jogada, P faz o seguinte: se na jogada anterior S escolheu a ação (i), então P escolhe a ação (ii); se na jogada anterior S escolheu a ação (ii), então P escolhe a ação (i).

Desse modo, após a primeira jogada de P, temos 2025 bolas de gude na caixa. Após a segunda jogada de P, temos 2023 bolas de gude na caixa. Após a terceira jogada de P, temos 2021 bolas de gude na caixa. Após a quarta jogada de P, temos 2019 bolas de gude na caixa. Após a quinta jogada de P, temos 2017 bolas de gude na caixa. Finalmente, após a sexta jogada de P, temos 2015 bolas de gude na caixa.

Agora só falta mostrar que o jogo não acaba antes da sexta jogada de P.

Note que, até logo antes da sexta jogada de P, o número de bolas de gude na sacola de cada jogador é maior ou igual a $100 - 5 \times 11 = 45$, e que o número de bolas de gude na caixa é maior ou igual a $2014 - 10 \times 13 = 1884$. Portanto, até logo antes da sexta jogada de P, o jogo não pode ter acabado por falta de bolas de gude nas sacolas ou na caixa. Além disso, logo antes da sexta jogada de P, há bolas de gude suficientes na sacola de P e na caixa para garantir que P pode escolher tanto a ação (i) como a ação (ii).

Note também que, como 11 e 13 são ímpares, após cada jogada de S há um número par de bolas de gude na caixa. Portanto, a primeira vez em que havia 2015 bolas de gude na caixa foi após a sexta jogada de P.

$\square$

Problema 5. Temos uma fila com 257 posições, numeradas de 0 a 256, com uma rã sentada na posição 128. Desejamos que a rã mude de posições na fila, saltando para a frente ou para trás. Inicialmente, a rã saltará 128 posições, de forma que, após esse primeiro salto, vá para a posição 0 ou para a posição 256; além disso, ela é treinada a saltar, a cada vez, a metade do número de posições que saltou anteriormente. Por exemplo, se quisermos que ela alcance a posição 192 da fila, ela deverá executar um salto para frente e, em seguida, um salto para trás.

(a) Exiba uma sequência de saltos para a rã alcançar a posição 100.

(b) Mostre que é possível a rã alcançar qualquer posição de 0 a 256.

Solução. Para os dois itens, observe que a rã saltará 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2 e 1 casas, nessa ordem e para frente ou para trás.

(a) Como $100 < 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$, a ideia é a rã começar saltando 128 casas para trás; em seguida, saltando 64, 32 e 16 casas para a frente, ela irá parar na casa $64 + 32 + 16 = 112$; agora, saltando sucessivamente 8 e 4 casas para trás, ela chegará à casa $112 - 8 - 4 = 100$.

(b) Considere um segmento de reta que representa a fila de tal maneira que a rã está posicionada inicialmente no centro desse segmento (veja figura abaixo). As bolinhas pretas correspondem as possibilidades novas em cada passo. Note que, a partir do terceiro passo, o número de novas possibilidades corresponde ao dobro do número de novas possibilidades no passo anterior. Além disso, as novas possibilidades estão dispostas no centro de duas possibilidades consecutivas (marcadas em barras verticais), de tal maneira que não há repetição. Assim, ao final de 8 passos, a rã terá $1 + 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 257$ possibilidades. Isso corresponde a todas as possibilidades da fila. $\square$