Olimpíada Cearense de Matemática (2021)
Fase 1 - Nível 1

1. Um número é chamado de autobiográfico quando seu primeiro algarismo da esquerda para direita (ou seja, o algarismo mais significativo) informa quantos algarismos iguais a zero ele possui, seu segundo algarismo informa quantos algarismos iguais a 1 ele possui, o terceiro informa a quantidade de algarismos iguais a 2 e assim sucessivamente. Por exemplo, 1210 é autobiográfico, já que ele possui um algarismo igual a 0, dois algarismos iguais a 1, um algarismo igual a 2 e zero algarismos iguais a 3. Marque a alternativa que contém um número autobiográfico.

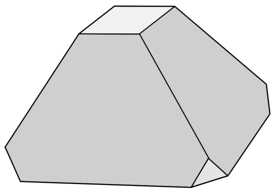
   (a) 123456
   (b) 301100
   (c) 5000001
   (d) 521001000
   (e) 4444333221

2. Qual é o valor da expressão

   $$2022^2 - 2022 \times 2020 - 2020^2 + 2020 \times 2022\ ?$$

   (a) 0
   (b) 2
   (c) 2022
   (d) 4042
   (e) 8084

3. Uma pirâmide de base quadrada tem todos os seus cantos cortados, como ilustrado na figura.



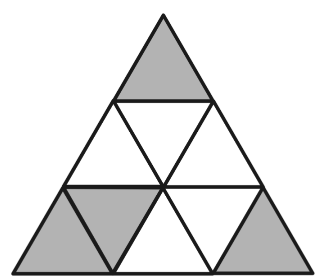
   Quantas arestas tem o sólido resultante?

   (a) 8 (b) 13 (c) 15 (d) 20 (e) 24

4. Tito gostaria de cobrir uma parede que possui 2,5 metros de altura e 10 metros de comprimento usando papel de parede. O papel de parede é vendido em rolos que possuem 0,70 metros de largura e 5 metros de comprimento (e não é possível comprar uma fração não inteira de um rolo). O papel que vem no rolo pode ser recortado da maneira que se achar necessário, antes de ser colado diretamente sobre a parede. Se Tito comprar o mínimo possível de rolos para cobrir sua parede, quantos metros quadrados de papel serão desperdiçados?

   (a) $0{,}4\,\mathrm{m}^2$
   (b) $0{,}5\,\mathrm{m}^2$
   (c) $1{,}5\,\mathrm{m}^2$
   (d) $2{,}0\,\mathrm{m}^2$
   (e) $3{,}0\,\mathrm{m}^2$

5. Ana quer escrever alguns dos números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ nos triângulos do tabuleiro abaixo, de modo cada número seja usado no máximo uma vez e que as somas em dois triângulos vizinhos (triângulos com lados comuns) sejam todas ímpares. Além disso, ela quer que a soma dos números escritos nos triângulos cinza seja a maior possível, e que a soma dos números escritos nos triângulos brancos seja a menor possível. Qual é a soma dos números do conjunto original que *não* serão utilizados?



   (a) 12 (b) 13 (c) 14 (d) 15 (e) 16

6. Sobre o número

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10,$$

podemos afirmar que ele:

(a) é divisível por 1000.

(b) é divisível por 49.

(c) é divisível por 1400.

(d) tem algarismo das unidades igual a 5.

(e) não é divisível por 81.

7. A quantidade mínima de quadrados de lado 3 cm necessária para cobrir um quadrado de lado 4 cm sem que nenhum dos quadrados seja dobrado ou cortado é igual a:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

8. O máximo divisor comum de dois números inteiros e positivos é 3, sendo que um deles é par. Sobre tais números, assinale a alternativa **falsa**.

(a) Um deles é ímpar.

(b) O mínimo múltiplo comum deles é divisível por 6.

(c) É possível que o par de número seja $(24, 9)$.

(d) É possível que ambos os números sejam divisíveis por 9.

(e) Existem mais de 3 pares de números que satisfazem tais condições.

9. Se cada letra da operação de subtração abaixo representa um algarismo, assinale a alternativa verdadeira.

$$\begin{array}{r} Y\,Y \\ -\ Z\,Z \\ \hline 4\ Z \end{array}$$

(a) $Z + Y$ é igual 12.

(b) YY é o triplo de ZZ.

(c) Y é menor que Z.

(d) $Y - Z$ é um múltiplo de 3.

(e) Y e Z são números ímpares.

10. "*Pedra, papel e tesoura*" é o nome de jogo disputado por dois participantes onde cada um escolhe (secretamente) um dos objetos dentre pedra, papel e tesoura. Depois, o objeto que cada um escolheu é revelado. Se ambos escolheram o mesmo objeto então o resultado é um empate. Se um escolhe pedra e o outro tesoura, ganha quem escolheu pedra, pois (segundo o jogo) "a pedra amassa a tesoura". Se um escolhe tesoura e o outro papel, quem escolheu tesoura ganha, pois tesoura corta o papel. Por fim, se um escolhe papel e o outro pedra, ganha quem escolheu papel, pois papel cobre a pedra.

Marília e João disputam "Pedra, papel e tesoura" por três rodadas, sendo que houve um empate e cada um venceu uma vez. Nas três rodadas, Marília escolheu o mesmo objeto. Sobre as três escolhas de João, podemos afirmar corretamente que:

(a) João escolheu o mesmo objeto duas vezes.

(b) João escolheu o mesmo objeto três vezes.

(c) João escolheu três objetos distintos.

(d) João escolheu pedra na primeira rodada.

(e) João escolheu papel na última rodada.

11. Tatiana escolheu 4 pontos distintos arbitrariamente, A, B, C e D, nesta ordem, em volta do círculo de um relógio de ponteiros no sentido horário. Ela percebeu que quando o ponteiro das horas atinge o ponto A, o ponteiro dos minutos leva exatamente 30 minutos para passar pelos outros três pontos B, C e D. Podemos afirmar que:

(a) Os pontos B, C e D estão num mesmo semicirculo.

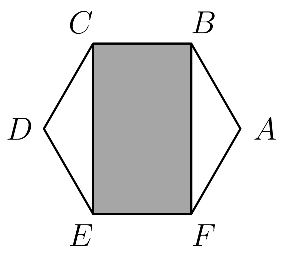
(b) O ponto D está a menos de 5 minutos atrás do ponto A.

(c) O ponto B está a no máximo 15 minutos atrás do ponto C.

(d) O ponto B está a no máximo 20 minutos atrás de D.

(e) O ponto D está exatamente 30 minutos a frente do ponto B.

12. A figura abaixo mostra um hexágono regular, $ABCDEF$, dentro do qual pintamos um retângulo, $BCEF$.



Comparando a área do retângulo destacado com o área do hexágono original, temos que:

(a) A área do retângulo é menor que um terço da área do hexágono.

(b) A área do retângulo é maior que um terço e menor que metade da área do hexágono.

(c) A área do retângulo é igual a metade da área do hexágono.

(d) A área do retângulo é maior que metade da área do hexágono.

(e) A área do retângulo é maior que dois terços da área do hexágono.

13. Maria está aprendendo a calcular potências cujos expoentes são potências, como 2^{2^3}. Veja que quando *não* se usa parêntesis, devemos calcular assim:

$$2^{2^3} = 2^{(2^3)} = 2^8 = 256,$$

o que é diferente de $(2^2)^3 = 4^3 = 2^6 = 64$. Ela ficou muito curiosa em saber quais potências resultam em números maiores. Agora é a sua vez. Assinale a opção em que todas as desigualdades são verdadeiras.

(a) $2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{2^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2}$

(b) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$

(c) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$

(d) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$

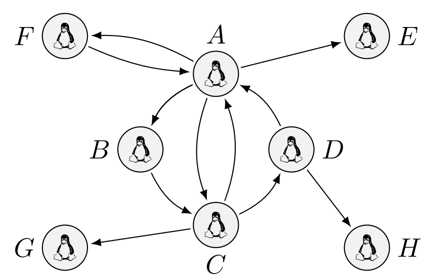
(e) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$

14. Entre os números naturais de 1 até n, no máximo 12 são divisíveis por 8. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 11?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

15. Cada círculo da figura abaixo representa um usuário de uma rede social. Uma seta apontando de um usuário X para um usuário Y significa que X pode enviar mensagens para Y (ou seja, Y é seguidor de X). Nesta rede, sempre que um usuário recebe uma mensagem, exatamente 1 hora depois todos os seus seguidores irão recebê-la também.

Uma empresa publicitária deseja pagar um usuário para dar início a uma nova campanha (inicialmente desconhecida por todos). Qual usuário deve ser escolhido para que a informação alcance todos da rede e faça isso o mais rápido possível?



(a) Usuário A.

(b) Usuário B.

(c) Usuário C.

(d) Usuário D.

(e) Usuário E.

Gabarito

1 (d)	**6 (c)**	**11 (a)**
2 (e)	**7 (c)**	**12 (d)**
3 (e)	**8 (d)**	**13 (e)**
4 (e)	**9 (a)**	**14 (d)**
5 (c)	**10 (c)**	**15 (c)**