XXXIV Olimpíada Cearense de Matemática
Nível 2 - Oitavo e Nono Anos

Reservado para a correção

Prova		**Probl. 1**	**Probl. 2**	**Probl. 3**	**Probl. 4**	**Probl. 5**	**Total**
# 0	**Nota**						

Instruções e Regulamento:

1. Identifique a prova somente no local indicado da capa.
2. Use o verso de cada folha como rascunho.
3. Verifique se sua prova está completa. A prova consta de 5 (cinco) problemas.
4. Somente serão consideradas as soluções escritas no espaço reservado para tal. Para escrevê-las, utilize caneta azul ou preta.
5. Cada problema vale 10 pontos.
6. O tempo de prova é de **4h**. Nenhum candidato poderá sair antes de completados 30 minutos de prova.
7. Não serão concedidas revisões de prova.
8. As soluções e a classificação serão divulgadas oficialmente no sítio **www.mat.ufc.br/ocm**, a partir do dia 06/12/2014.
9. Serão classificados os 20 primeiros colocados de cada nível.
10. Para fins de classificação, serão adotados os seguintes critérios de desempate:
    (a) maior número de problemas com pontuação ≥ 8;
    (b) maior nota no problema 5;
    (c) maior nota no problema 4;
    (d) maior nota no problema 3.

Identificação: Prova #0

Nome:	
Endereço:	
E-mail:	**Telefone:**
Escola:	**Série:**

Problema 1. Sejam x, y e z números inteiros tais que $2x - 3y - 10z = 0$. Mostre que $\frac{y(x+z)}{6}$ é um número inteiro.

Solução. Repare que, da relação dada, y deve ser par, visto que

$$y = 2x - 2y - 10z = 2(x - y - 5z).$$

Por outro lado, a mesma relação pode ser escrita na forma

$$2(x + z) = 3(y + 4z),$$

de onde concluímos que $x + z$ é divisível por 3. Portanto, $y(x + z)$ é divisível por $2 \cdot 3 = 6$. □

Problema 2. Faça os seguintes itens:

(a) Mostre que $(\sqrt{2}+1)^3 > 10$.

(b) Mostre que, na representação decimal do número $(\sqrt{2}-1)^{33}$, os primeiros 10 algarismos após a vírgula são todos iguais a 0.

Solução. Para o item (a), veja que $(\sqrt{2}+1) > 2$ e $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} > 5$. Logo $(\sqrt{2}+1)^3 > 2 \cdot 5 = 10$. Para o item (b), observe que $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2-1 = 1$. Logo,

$$(\sqrt{2}-1)^{33} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{33} < \left(\frac{1}{10}\right)^{11} = 0,00000000001.$$

Logo, seus 10 primeiros algarismos após a vírgula são iguais a zero. $\square$

Problema 3. Seja $ABCD$ um trapézio tal que AD é paralelo a BC e $\overline{AD} > \overline{BC}$. Seja E o ponto médio da diagonal BD e seja F o pé da reta perpendicular baixada de B a AD.

(a) Mostre que, se $\overline{AB} = \overline{CD}$, então EF é paralelo a AC e $\overline{EF} = \overline{AC}/2$.

(b) Mostre que, se o simétrico de C em relação a E coincide com o simétrico de A em relação a F, então $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Solução.
(a) Seja $X \in AD$ o ponto de interseção da reta que passa por B e é paralela a CD. Por um lado, $BCDX$ é um paralelogramo, de forma que E é o ponto médio de CX. Por outro, o triângulo ABX é isosceles com $\overline{AB} = \overline{BX}$. Segue que $\overline{AF} = \overline{FX}$. Basta, agora, aplicar o teorema da base média ao triângulo ACX.

(b) Denote por Y o simétrico de A em relação a F. Por hipótese, Y é também o simétrico de C em relação a E. Como as diagonais do quadrilátero $YBCD$ se cortam ao meio, temos que $YBCD$ é um paralelogramo. Portanto, $\overline{YB} = \overline{CD}$. Temos também que os triângulos BFA e BFX são congruentes (caso lado-ângulo-lado). Assim, $\overline{YB} = \overline{AB}$. Portanto, $\overline{AB} = \overline{YB} = \overline{CD}$.

$\square$

Problema 4. Faça os seguintes itens:

(a) Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Encontre, com justificativa, os valores mínimo e máximo da soma $x + y + z$, sabendo que x, y e z são numeros reais que satisfazem as desigualdades

$$x^2 + yz \leq 2, \qquad y^2 + xz \leq 2, \qquad z^2 + xy \leq 2.$$

Solução.
(a) Para x, y reais, temos que $(x - y)^2 \geq 0$, logo $x^2 + y^2 \geq 2xy$. De modo análogo, $x^2 + z^2 \geq 2xz$ e $y^2 + z^2 \geq 2yz$. Somando membro a membro as três desigualdades, segue que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

(b) Somando membro a membro as três desigualdades do enunciado, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \leq 6 \tag{1}$$

Substituindo o resultado do item (a) na desigualdade acima, temos que $xy+yz+xz \leq 3$. Somando essa última desigualdade novamente com (1), chegamos à conclusão que

$$(x + y + z)^2 \leq 9.$$

Então, os valores mínimo e máximo de $x + y + z$ são respectivamente iguais a -3 e 3, realizados por $x = y = z = 1$ e $x = y = z = -1$, também respectivamente. $\square$

Problema 5. Dizemos que um conjunto X de números naturais é *bom* quando ele satisfaz a seguinte propriedade: para todo natural x, se $x \in X$, então $2x \notin X$. Para cada natural k, sejam $A_k = \{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$ e b_k o maior número de elementos que um subconjunto bom de A_k pode ter.

(a) Mostre, para todo $k \geq 2$, temos $b_k = b_{k-2} + 2^{k-1}$.

(b) Para n natural, calcule o valor de b_n em função de n.

Solução. Seja $I_0 = \{1\}$ e, para todo natural $k \geq 1$, seja I_k o conjunto $\{2^{k-1} + 1, \dots, 2^k\}$. Queremos mostrar primeiro que, para todo k, existe um conjunto bom $B_k \subset \{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$ tal que $|B_k| = b_k$ e que $I_k \subset B_k$, ou seja, $B_k \cap I_k = I_k$.

Para $k \geq 1$, seja $X_k \subset \{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$ um conjunto bom com b_k elementos. Tome $r \in I_k$. Se r é ímpar, então, pela maximalidade de $|X|$, devemos ter $r \in X$. De fato, como $2r > 2^k$ e $r/2 \notin \mathbb{Z}$, se $r \notin X$ teríamos que $X \cup \{r\}$ seria um conjunto bom, contido em $\{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$ e com mais elementos que X, o que é uma contradição. Suponha, agora, que r é par, digamos $r = 2s$. Veja que $s \in I_{k-1}$ e que no máximo um elemento do conjunto $\{r, s\}$ pode pertencer a X_k. Note que o conjunto $X'_k = (X \cup \{r\}) \setminus \{s\}$ também é bom e $|X'_k| \geq |X_k|$. Repetindo esse argumento para cada $r \in I_k$, temos que o conjunto $B_k = (X_k \cup I_k) \setminus I_{k-1}$ é bom e $|B_k| \geq |X_k| \geq b_k$. Logo $|B_k| = b_k$.

Note agora que, como B_k é bom e $B_k \cap I_k = I_k$, devemos ter $B_k \cap I_{k-1} = \emptyset$. Seja, agora, $X_{k-2} = B_k \cap \{1, 2, 3, \dots, 2^{k-2}\}$. Claramente, todo subconjunto de um conjunto bom também é bom. Logo, X_{k-2} é bom. Portanto, $|X_{k-2}| \leq b_{k-2}$, o que implica

$$b_k = |B_k| = |X_{k-2}| + |I_k| \leq b_{k-2} + 2^{k-1}.$$

Por outro lado, se Y_{k-2} é qualquer subconjunto bom de $\{1, 2, 3, \dots, 2^{k-2}\}$ temos que $Y_{k-2} \cup I_k$ é bom (pois, para todo $y \in Y_{k-2}$, temos $2y \notin I_k$). Em particular, tomando Y_{k-2} com a maior quantidade de elementos possível, ou seja, b_{k-2}, segue que $b_k \geq |Y_{k-2} \cup I_k| = b_{k-2} + 2^{k-1}$.

Para o item (b), veja que a recorrência do item (a) implica (pois a soma é telescópica)

$$b_{2n+1} = (2^{2n} + 2^{2n-2} + \cdots + 2^2) + b_1$$

e

$$b_{2n} = (2^{2n-1} + 2^{2n-3} + \cdots + 2^1) + b_0.$$

Como $b_0 = b_1 = 1$, calculando a soma de cada PG acima e comparando os resultados, conclui-se que

$$b_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

□