

XXXV Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 2 - Oitavo e Nono Anos

Reservado para a correção

Prova		Probl. 1	Probl. 2	Probl. 3	Probl. 4	Probl. 5	Total
# 2000	Nota						

Instruções e Regulamento:

1. Identifique a prova somente no local indicado da capa.
2. Use o verso de cada folha como rascunho.
3. Verifique se sua prova está completa. A prova consta de 5 (cinco) problemas.
4. Somente serão consideradas as soluções escritas no espaço reservado para tal. Para escrevê-las, utilize caneta azul ou preta.
5. Cada problema vale 10 pontos.
6. O tempo de prova é de **4 horas**. Nenhum candidato poderá sair antes de completados 30 minutos de prova.
7. Não serão concedidas revisões de prova.
8. As soluções e os premiados serão divulgados oficialmente no sítio www.mat.ufc.br/ocm, até o dia 30/11/2015.

Identificação: Prova #2000

Nome:	
Endereço:	
E-mail:	Telefone:
Escola:	Série:

Problema 1. Existe algum inteiro positivo que diminui 57 vezes quando apagamos seu algarismo de maior ordem (o primeiro algarismo da esquerda para a direita)?

Problema 2. Um inteiro positivo n diz-se *invocado* se existem n inteiros positivos a_1, \dots, a_n , dois a dois distintos, tais que

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

O inteiro positivo 3, por exemplo, é invocado, visto que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Mostre que todo inteiro $n > 2$ é invocado.

Problema 3. Se P e Q são pontos do plano, denotamos por $|\overline{PQ}|$ o comprimento do segmento \overline{PQ} . Seja ABC um triângulo. Considere o ponto $D \in \overline{BC}$ tal que $|\overline{BD}| = 2|\overline{DC}|$. Mostre que

$$3|\overline{AD}| < |\overline{AB}| + 2|\overline{AC}|.$$

Problema 4. Tem-se 2015 números reais e sabe-se que a soma de quaisquer 100 desses números é positiva. Mostre que a soma de todos os 2015 números é positiva.

Problema 5. Em um planeta distante há apenas três habitantes, chamados Alfa, Beta e Gama. Alfa e Beta são amigos, Beta e Gama são amigos, mas Alfa e Gama são inimigos. Neste planeta há exatamente três fichas, uma azul, uma branca e uma cinza, e cada um dos habitantes carrega consigo uma das fichas. Cada vez que Alfa e Beta se encontram, eles trocam as fichas que carregam consigo. Beta e Gama também trocam as fichas que carregam consigo cada vez que se encontram. Alfa e Gama, porém, não trocam suas fichas quando se encontram. No início do dia, Alfa estava com a ficha azul, Beta estava com a ficha branca e Gama estava com a ficha cinza. Se Beta trocou de ficha 18 vezes durante o dia, é possível que no final do dia Alfa esteja com a ficha cinza, Beta esteja com a ficha branca e Gama esteja com a ficha azul? Justifique sua resposta.