XXXVI Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 2 - Oitavo e Nono Anos

Problema 1. João escolheu três algarismos distintos e, com eles, formou todos os seis números possíveis de três algarismos distintos. Em seguida, ele somou esses seis números, obtendo como resultado um múltiplo de 108. Pergunta-se: quais os possíveis valores dos algarismos escolhidos por João? Justifique sua resposta.

Problema 2. Se R e S são pontos do plano, denotamos por $\overline{RS}$ o comprimento do segmento RS. Dados três pontos não colineares O, P e Q, denotamos por $\angle POQ$ o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, cuja medida, em graus, está no intervalo $(0, 180)$.

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 3. Seja X o ponto sobre o lado AB tal que $\overline{AX} = 1$ e sejam Y e Z os pontos sobre o lado BC tais que $\overline{BY} = \overline{ZC} = 1$. Sejam α e β, respectivamente, as medidas, em graus, dos ângulos $\angle AZX$ e $\angle AYX$. Encontre o valor de $\alpha + \beta$.

Problema 3. Um comerciante de tijolos possui 100 tijolos, distribuídos em dez pilhas de dez tijolos. Ele possui também uma balança, que mede com precisão o peso de qualquer quantidade de tijolos. Sabe-se que em uma das pilhas cada tijolo pesa exatamente 999 gramas e que nas outras nove pilhas cada tijolo pesa exatamente 1000 gramas, mas não se sabe em qual das pilhas estão os tijolos de 999 gramas. Explique como o comerciante, fazendo apenas uma pesagem, pode identificar a pilha que contém os tijolos de 999 gramas.

Problema 4. Sejam x e y números reais tais que $x^n + y^n$ é racional para $n = 2, 3, 4$ e 5.

(a) Mostre que $(xy)^2$ é racional.

(b) Mostre que $x + y$ é racional.

Problema 5. Encontre o menor inteiro positivo que é múltiplo de 2016 e cuja representação decimal contém apenas algarismos 0 e 1.