

XXXVII Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 2 - Oitavo e Nono Anos

Problema 1. Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são colocados, não necessariamente nesta ordem, ao redor de um círculo. Lendo, no sentido horário, três algarismos consecutivos, forma-se um número de três algarismos. Nove números de três algarismos podem ser formados dessa forma. Encontre os possíveis valores da soma desses nove números. Justifique sua resposta.

Problema 2. Um inteiro positivo q é dito um quadrado perfeito quando existe um inteiro positivo k tal que $q = k \times k$. Por exemplo, 9 e 64 são quadrados perfeitos, pois $9 = 3 \times 3$ e $64 = 8 \times 8$.

Mostre que não existe quadrado perfeito de oito algarismos cujos quatro algarismos de mais alta ordem (os quatro primeiros da esquerda para a direita) são todos iguais a 9.

Problema 3. Os números reais não negativos a e b satisfazem $a + b = 1$. Prove que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1.$$

Além disso, para cada uma das desigualdades acima, encontre todos os valores de a e b para os quais a igualdade ocorre.

Problema 4. Tem-se seis jarras. Inicialmente, cinco delas contêm 2 litros de água e uma delas contém 1 litro de água. Um movimento permitido consiste em escolher duas das jarras e dividir a água contida nessas duas jarras em duas porções iguais. É possível que, após um número finito de movimentos, todas as seis jarras tenham a mesma quantidade de água? Justifique sua resposta.

(Nota: assuma que a capacidade de cada uma das seis jarras é maior que 2 litros e que nenhum líquido é desperdiçado ao se realizar uma operação permitida.)

Problema 5. Se P e Q são pontos do plano, denotamos por \overline{PQ} o comprimento do segmento PQ .

Seja ABC um triângulo equilátero de área $1m^2$. Considere os pontos D , E e F sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente, de modo que $\overline{CD} = 2\overline{BD}$, $\overline{AE} = 2\overline{CE}$ e $\overline{BF} = 2\overline{AF}$. Seja H a interseção dos segmentos AD e EF . Calcule a área do triângulo DFH .