XXXVIII Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 2 - Oitavo e Nono Anos

Problema 1. Antônio e Bruno compraram ingressos para um evento. Ao chegarem em casa, eles perceberam que os ingressos eram numerados com valores naturais *consecutivos*. O número de Antônio é múltiplo de 27 e o número de Bruno é múltiplo de 25. Além disso, eles viram que os números dos ingressos são os menores naturais que satisfazem essas propriedades e que o número de Antônio é menor do que o de Bruno. Encontre os números dos ingressos e justifique sua resposta.

Problema 2. Em um tabuleiro 5×5, Téo e Dora jogam o seguinte jogo. Téo dispõe de algumas bombas, cada uma delas ocupando uma peça 1×1, e Dora dispõe de um navio, que ocupa uma peça 4×1. Inicialmente, Téo distribui as bombas em algumas casas do tabuleiro; depois, Dora tenta colocar seu navio em casas não ocupadas por bombas.

(a) Mostre, com um exemplo, que Téo precisa de apenas 6 bombas para garantir que Dora não consiga colocar seu navio.

(b) Mostre que se Téo dispõe de apenas 5 bombas, então independente de onde as coloque Dora sempre conseguirá colocar seu navio. Justifique sua resposta.

Problema 3. Seja ABC um triângulo equilátero com lados de comprimento igual a 3 e seja D o ponto sobre o lado BC tal que o comprimento do segmento CD vale 1. Sejam M o ponto médio do segmento AD e Γ o círculo de centro M e tangente ao segmento AC. Se E é o ponto sobre o segmento AB tal que DE tangencia Γ, calcule o comprimento de BE. Justifique sua resposta.

Problema 4. Seja n um número natural.

(a) Mostre que $8^n - 1$ é múltiplo de 7.

(b) Encontre todos os valores de n tais que $\dfrac{8^n - 1}{7}$ é um número primo. Justifique sua resposta.

Problema 5. Considere 5 números reais positivos distintos. Mostre que sempre é possível escolher dois deles tais que tanto sua soma como o valor absoluto de sua diferença sejam diferentes dos outros três números.