XXXIX Olimpíada Cearense de Matemática
Nível 2 - Oitavo e Nono Anos

Problema 1. Encontre o *menor* inteiro positivo $ABCD$ de quatro algarismos que satisfaz a equação

$$ABCD = A \times BCD + ABC \times D.$$

Justifique sua resposta.
(Nota: letras distintas não necessariamente representam algarismos distintos e $A \neq 0$.)

Problema 2. Tem-se várias peças com o formato de um retângulo 1×5 e várias peças com o formato de um quadrado 3×3. Qual o *menor* inteiro positivo n tal que é possível cobrir totalmente um tabuleiro $n \times n$ utilizando pelo menos uma peça de cada um desses tipos e sem que haja sobreposição de peças? Justifique sua resposta.

Problema 3. Sobre o lado BC do triângulo ABC consideramos os pontos P_1 e Q_1 tais que $\overline{BP_1} = \overline{P_1Q_1} = \overline{Q_1C}$. Consideramos também os pontos P_2 e Q_2 sobre o lado CA de ABC tais que $\overline{CP_2} = \overline{P_2Q_2} = \overline{Q_2A}$ e os pontos P_3 e Q_3 sobre o lado AB de ABC tais que $\overline{AP_3} = \overline{P_3Q_3} = \overline{Q_3B}$.

(a) Mostre que os triângulos $P_1P_2P_3$ e $Q_2Q_3Q_1$ são congruentes.

(b) Denote por D e E, respectivamente, as interseções de P_1P_2 com os segmentos Q_1Q_3 e Q_1Q_2. Mostre que $\overline{P_1D} = \overline{DE} = \overline{EP_2}$.

Problema 4. São dadas N pedras, possivelmente de pesos variados, de modo que ambas as condições abaixo são satisfeitas:

• É possível separá-las em 2019 grupos de modo que a soma dos pesos das pedras de cada grupo é a mesma.
• É possível separá-las em 2020 grupos de modo que a soma dos pesos das pedras de cada grupo é a mesma.

Ache o *menor* valor possível de N. Justifique sua resposta.

Problema 5. O número real a é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$. Encontre um polinômio de grau 3 e coeficientes inteiros que tem a^3 por raiz. Justifique sua resposta.