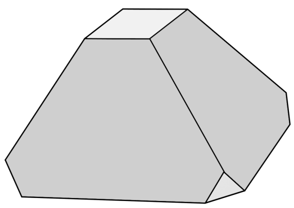
Olimpíada Cearense de Matemática (2021)
Fase 1 - Nível 2

1. Quantos inteiros positivos menores que 1000 existem com a soma dos dígitos igual a 7?

   (a) 28 (b) 29 (c) 30 (d) 35 (e) 36

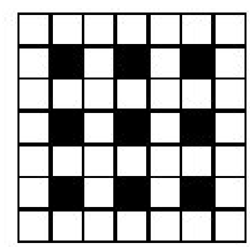
2. Uma pirâmide de base quadrada tem todos os seus cantos cortados, como mostrado na figura.



   Quantas arestas tem o sólido resultante?

   (a) 8 (b) 13 (c) 15 (d) 20 (e) 24

3. A figura abaixo mostra um tabuleiro no qual linhas de quadradinhos brancos alternam com linhas de quadradinhos brancos e pretos.



   Um tabuleiro maior, construído da mesma forma, tem 49 quadradinhos pretos. Quantos quadradinhos brancos ele possui?

   (a) 176 (b) 196 (c) 245 (d) 289 (e) 392

4. Dados números naturais x, y e z, escrevemos x^{y^z} para denotar a potência de base x e expoente y^z. Por exemplo, 10^{2^4} é o mesmo que 10^{16}. A esse respeito, assinale a opção em que todas as desigualdades são verdadeiras.

   (a) $2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{2^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2}$
   (b) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$
   (c) $3^{2^2} < 3^{2^3} < 2^{3^2} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$
   (d) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 2^{3^3} < 3^{3^2}$
   (e) $3^{2^2} < 2^{3^2} < 3^{2^3} < 3^{3^2} < 2^{3^3}$

5. Independentemente de como se escolha o inteiro positivo n, o número $(n+2)(n+3)(2n+5)$ é sempre múltiplo de:

   (a) 4 (b) 6 (c) 9 (d) 10 (e) 15

6. Qual o maior valor possível que o número

$$a(b+c) - b(a+c)$$

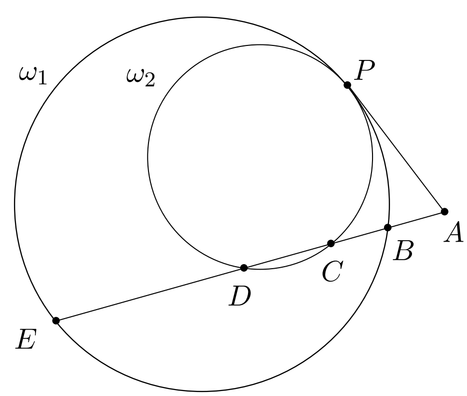
   pode assumir se a, b e c são inteiros dois a dois distintos, de 1 a 10?

   (a) 80 (b) 81 (c) 84 (d) 90 (e) 100

7. Em um quadrilátero convexo $ABCD$, sabemos que $AB = AC = AD$. Se a medida do ângulo $B\widehat{A}D$ é $70°$, então a medida do ângulo $B\widehat{C}D$ é:

   (a) $110°$.
   (b) $20°$.
   (c) $145°$.
   (d) $70°$.
   (e) Não é possível determinar.

8. Na figura abaixo, as circunferências ω_1 e ω_2 são tangentes internamente em P e o segmento AP é tangente a ω_1, ω_2. Uma reta passando por A intersecta ω_1 em B, E e ω_2 em C, D.



   Se B é o ponto médio de AC, então:

   (a) $AE = 5\,AB$.
   (b) $AD = 2\,AC$.
   (c) $AP = 3\,AB$.
   (d) $AD = DE$.
   (e) $AP = DE$.

9. Na soma abaixo, A, B, C, D são dígitos de 0 a 9.

$$\begin{array}{r} ABC \\ + \quad 9A \\ \hline 1C7D \end{array}$$

O valor de $A + B + C + D$ é:

(a) 24 (b) 26 (c) 29 (d) 31 (e) 21

10. Homens e mulheres participam de uma festa. Cada homem dança com 4 mulheres e cada mulher dança com 3 homens. Sabendo que total de pessoas na festa é 14, o total de mulheres é:

(a) 3 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) 11

11. O triângulo ABC possui área 256. Sejam D e E os pontos médios de AB e BC, respectivamente, e F o ponto médio de AE. A área de DEF vale:

(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 64 (e) 128

12. O produto de dois números naturais é 36000. O maior valor possível do máximo divisor comum (mdc) desses números é:

(a) 4 (b) 15 (c) 30 (d) 32 (e) 60

13. Quantos valores inteiros de n existem tais que o número $n(n+2)+2021$ é um quadrado perfeito?

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3 (e) 4

14. Sabendo que a, b são reais tais que $a + b = 1$, assinale a igualdade que **não necessariamente** é correta.

(a) $a^3 - b^3 = a^2 + ab + b^2$.
(b) $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$.
(c) $a^2 - b^2 = a - b$.
(d) $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.
(e) $a^3 + b^3 = a^2 - ab + b^2$.

15. De quantas maneiras podemos escolher três números a, b, c do conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tais que existe um triângulo escaleno não-degenerado com comprimentos dos lados iguais a a, b, c?

(a) 28 (b) 29 (c) 30 (d) 35 (e) 343

Gabarito

1 (e)	**6 (b)**	**11 (c)**
2 (e)	**7 (c)**	**12 (e)**
3 (a)	**8 (d)**	**13 (e)**
4 (e)	**9 (b)**	**14 (a)**
5 (b)	**10 (d)**	**15 (a)**