XXXIV Olimpíada Cearense de Matemática
Nível 3 - Ensino Médio

Reservado para a correção

Prova		**Probl. 1**	**Probl. 2**	**Probl. 3**	**Probl. 4**	**Probl. 5**	**Total**
# 0	**Nota**						

Instruções e Regulamento:

1. Identifique a prova somente no local indicado da capa.
2. Use o verso de cada folha como rascunho.
3. Verifique se sua prova está completa. A prova consta de 5 (cinco) problemas.
4. Somente serão consideradas as soluções escritas no espaço reservado para tal. Para escrevê-las, utilize caneta azul ou preta.
5. Cada problema vale 10 pontos.
6. O tempo de prova é de **4h**. Nenhum candidato poderá sair antes de completados 30 minutos de prova.
7. Não serão concedidas revisões de prova.
8. As soluções e a classificação serão divulgadas oficialmente no sítio **www.mat.ufc.br/ocm**, a partir do dia 06/12/2014.
9. Serão classificados os 20 primeiros colocados de cada nível.
10. Para fins de classificação, serão adotados os seguintes critérios de desempate:
    (a) maior número de problemas com pontuação ≥ 8;
    (b) maior nota no problema 5;
    (c) maior nota no problema 4;
    (d) maior nota no problema 3.

Identificação: Prova #0

Nome:	
Endereço:	
E-mail:	**Telefone:**
Escola:	**Série:**

Problema 1. Seja A um conjunto formado por elementos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 2014\}$, escolhidos de tal forma que a diferença entre dois elementos quaisquer de A nunca seja igual a 3, 6, 9, 12, 15, 18 ou 21.

(a) Dê exemplo de um tal conjunto A, contendo pelo menos 252 elementos.

(b) Mostre que qualquer conjunto A satisfazendo as condições do enunciado tem no máximo 252 elementos.

Solução.
(a) Podemos ter $1, 2, 3 \in A$, mas temos de evitar $4, 5, 6, \ldots, 22, 23, 24 \in A$. Em seguida, podemos ter $25, 26, 27 \in A$, mas temos de evitar $28, 29, 30, \ldots, 46, 47, 48 \in A$. Prosseguindo desse modo, somos levados ao exemplo

$$A = \{1, 2, 3\} \cup \{25, 25, 27\} \cup \{49, 50, 51\} \cup \ldots \cup \{1993, 1994, 1995\}.$$

Por fim, como a lista $1, 25 = 1 + 24, 1 + 24 \cdot 2, \ldots, 1993 = 1 + 24 \cdot 83$ tem 84 elementos, segue que A tem $84 \cdot 3 = 252$ elementos.

(b) Escrevendo

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2014\} = \underbrace{\{1, 4, 7, 10, \ldots, 2014\}}_{X} \cup \underbrace{\{2, 5, 8, 11, \ldots, 2012\}}_{Y} \cup \underbrace{\{3, 6, 9, 12, \ldots, 2013\}}_{Z},$$

concluímos que a diferença entre dois elementos de A pertencentes a um mesmo dentre os conjuntos X, Y e Z é pelo menos 24. Portanto, A possui no máximo 84 elementos em cada um dos conjuntos X, Y e Z, de forma que A tem, no máximo, $84 \cdot 3 = 252$ elementos. $\square$

Problema 2. Seja $\mathbb{Z}^2$ o subconjunto do plano cartesiano formado pelos pontos de coordenadas inteiras: $\mathbb{Z}^2 = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{Z}\}$. Uma função $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ é *harmônica* se

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\left[f(a+1,b) + f(a-1,b) + f(a,b+1) + f(a,b-1)\right],$$

para todos $a,b \in \mathbb{Z}$. A esse respeito, faça os seguintes itens:

(a) Se f é uma função harmônica tal que $|f(a,b)| \leq 2014$ para todos $a,b \in \mathbb{Z}$, prove que f é constante.

(b) Prove que existem infinitas funções harmônicas que não são múltiplas uma da outra.

Solução.
(a) Se $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ são tais que $f(x_0,y_0) = \max\{f(a,b);\ a,b \in \mathbb{Z}\}$, então

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) &= \frac{1}{4}(f(x_0+1,y_0) + f(x_0,y_0+1) + f(x_0-1,y_0) + f(x_0,y_0-1)) \\ &\leq \frac{1}{4}(f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0)) \\ &= f(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x_0,y_0) = f(x_0+1,y_0) = f(x_0,y_0+1) = f(x_0-1,y_0) = f(x_0,y_0-1).$$

Argumentando de modo análogo, concluímos que $f(a,b) = f(x_0,y_0)$, para todos $a,b \in \mathbb{Z}$.

(b) Defina f em cada um dos conjuntos de pontos

$$\{\ldots,(-2,0),(-1,0),(0,0),(1,0),(2,0),\ldots\} \text{ e } \{\ldots,(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1),\ldots\},$$

exigindo que $f(a,b)$ seja a média aritmética de $f(a-1,b)$ e $f(a+1,b)$. Em seguida, defina f em cada conjunto de pontos da forma $\{\ldots,(a,b-2),(a,b-1),(a,b),(a,b+1),(a,b+2),\ldots\}$, exigindo que $f(a,b)$ seja a média aritmética de $f(a,b-1)$ e $f(a,b+1)$. Se, para algum $n \geq 1$, tivermos que

$$2f(a,b) = f(a-1,b) + f(a+1,b),$$

para todo $0 \leq b \leq n$ e todo $a \in \mathbb{Z}$, então, pela construção que fizemos, teremos

$$\begin{aligned} & 2f(a,n+1) - f(a-1,n+1) - f(a+1,n+1) = \\ &= 2(2f(a,n-1) - f(a,n)) - (2f(a-1,n-1) - f(a-1,n)) \\ &\quad - (2f(a+1,n-1) - f(a+1,n)) \\ &= 2(2f(a,n-1) - f(a-1,n-1) - f(a+1,n-1)) \\ &\quad - (2f(a,n) - f(a-1,n) - f(a+1,n)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos $2f(a,b) = f(a-1,b) + f(a+1,b)$, para todos $a \in \mathbb{Z}$ e $b \geq 0$. Analogamente, provamos que tal identidade vale para todo $b \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$(f(a+1,b) + f(a-1,b)) + (f(a,b+1) + f(a,b-1)) = 2f(a,b) + 2f(a,b) = 4f(a,b).$$

Por fim, pedindo que $f(0,0) = k$, $f(1,0) = k+1$, $f(0,1) = k+1$ e $f(1,1) = k+2$ evitamos que as funções harmônicas f_k assim obtidas sejam múltiplas uma da outra.

$\square$

Problema 3. O hexágono convexo $ABCDEF$ é tal que $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 1$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{DE} = 3\sqrt{2}$, $\overline{EF} = 1$ e $A\widehat{B}C = A\widehat{C}D = A\widehat{D}E = A\widehat{E}F = 90°$. Se G é um ponto sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $A\widehat{F}G = 90°$, calcule o comprimento $\overline{AG}$.

Solução 1. O teorema de Pitágoras garante sucessivamente que $\overline{AC} = 3$, $\overline{AD} = 3\sqrt{2}$, $\overline{AE} = 6$ e $\overline{AF} = \sqrt{37}$. Também, ACD e ADE são triângulos retângulos e isósceles, de forma que $C\widehat{A}D = C\widehat{D}A = D\widehat{A}E = D\widehat{E}A = 45°$. Portanto, sendo H o ponto de interseção das semirretas $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{FE}$, segue que HDE também é um triângulo retângulo e isósceles, de forma que $\overline{DH} = \overline{EH} = 3$. Então, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo CHF, concluímos que $\overline{CF} = 2\sqrt{13}$. Agora, se I é o pé da perpendicular baixada de F à reta $\overleftrightarrow{AG}$, então $I \in AG$. Pondo $\overline{AI} = m$ e $\overline{FI} = h$, segue, novamente pelo teorema de Pitágoras, que $h^2 + m^2 = 37$. Por outro lado, como $BCFI$ é um trapézio retângulo de bases BC e FI, mais uma aplicação do teorema de Pitágoras fornece

$$(h-1)^2 + (m + 2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{13})^2.$$

Desenvolvendo essa igualdade e substituindo $h^2 + m^2 = 37$, obtemos que $h = 2\sqrt{2}m - 3$ e, daí, $(2\sqrt{2}m - 3)^2 + m^2 = 37$. Resolvendo essa equação do segundo grau, chegamos a $m = \frac{2\sqrt{2}+6}{3}$. Por fim aplicando as relações métricas em triângulos retângulos ao triângulo AFG, segue que

$$\overline{AG} = \frac{\overline{AF}^2}{\overline{AI}} = \frac{37}{m} = \frac{111}{2\sqrt{2}+6}.$$

□

Solução 2. Como na solução anterior, obtemos $\overline{AC} = 3$, $\overline{AD} = 3\sqrt{2}$, $\overline{AE} = 6$ e $\overline{AF} = \sqrt{37}$. Como os triângulos ACD e ADE são retângulos e isósceles, tem-se $C\widehat{A}E = 90°$. Denote $B\widehat{A}C$ por α e $E\widehat{A}F$ por β. Como

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ,\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}\ ,\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{37}}{6}\ \text{ e }\ \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{6},$$

temos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{37}} + \frac{1}{\sqrt{37}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{37}} = \frac{6+2\sqrt{2}}{3\sqrt{37}}.$$

Denote $F\widehat{A}G$ por θ. Temos $\theta = 180° - (90° + \alpha + \beta) = 90° - (\alpha+\beta)$. Temos então

$$\cos\theta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{6+2\sqrt{2}}{3\sqrt{37}}.$$

Portanto,

$$\overline{AG} = \frac{\sqrt{37}}{\cos\theta} = \frac{111}{6+2\sqrt{2}}.$$

□

Problema 4. Faça os seguintes itens:

(a) Prove que existem $x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $13x^4 + 3y^4 - z^4 = 2013$.

(b) Prove que não existem $x, y, z \in \mathbb{N}$ tais que $13x^4 + 3y^4 - z^4 = 2014$.

Solução.
(a) Fazendo $z = 2x$, obtemos $y^4 - x^4 = 671$ ou, ainda, $(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 11 \cdot 61$. Portanto, $y^2 - x^2 = 11$ e $y^2 + x^2 = 61$, de forma que $x = 5$, $y = 6$ e $z = 10$.

(b) Suponha que haja uma solução. Como $a^4 \equiv 0$ ou $1 (\text{mod.}\, 8)$, temos

$$13x^4 + 3y^4 - z^4 \equiv 0, 2, 4, 5 \text{ ou } 7 \,(\text{mod.}\, 8).$$

Mas, como $2014 \equiv 6 \,(\text{mod.}\, 8)$, chegamos a uma contradição. $\square$

Problema 5. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$. Encontre, com justificativa, o maior número de elementos que um subconjunto X do conjunto A pode ter, satisfazendo a seguinte condição: se $x \in X$, então $2x \notin X$.

Solução 1. Seja $I_0 = \{1\}$ e, para todo natural $k \geq 1$, sejam $A_k = \{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$ e $I_k = \{2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k\}$. Chamemos um subconjunto X de A_k de *bom* se X possuir a propriedade do enunciado. Seja b_k o maior número de elementos que um subconjunto bom de A_k pode ter. Queremos mostrar primeiro que, para todo k, existe um conjunto bom $B_k \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$ tal que $|B_k| = b_k$ e que $I_k \subset B_k$, ou seja, $B_k \cap I_k = I_k$.

Para $k \geq 1$, seja $X_k \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$ um conjunto bom com b_k elementos. Tome $r \in I_k$. Se r é ímpar, então, pela maximalidade de $|X|$, devemos ter $r \in X$. De fato, como $2r > 2^k$ e $r/2 \notin \mathbb{Z}$, se $r \notin X$ teríamos que $X \cup \{r\}$ seria um conjunto bom, contido em $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$ e com mais elementos que X, o que é uma contradição. Suponha, agora, que r é par, digamos $r = 2s$. Veja que $s \in I_{k-1}$ e que no máximo um elemento do conjunto $\{r, s\}$ pode pertencer a X_k. Note que o conjunto $X_k' = (X \cup \{r\}) \setminus \{s\}$ também é bom e $|X_k'| \geq |X_k|$. Repetindo esse argumento para cada $r \in I_k$, temos que o conjunto $B_k = (X_k \cup I_k) \setminus I_{k-1}$ é bom e $|B_k| \geq |X_k| \geq b_k$. Logo $|B_k| = b_k$.

Note agora que, como B_k é bom e $B_k \cap I_k = I_k$, devemos ter $B_k \cap I_{k-1} = \emptyset$. Seja, agora, $X_{k-2} = B_k \cap \{1, 2, 3, \ldots, 2^{k-2}\}$. Claramente, todo subconjunto de um conjunto bom também é bom. Logo, X_{k-2} é bom. Portanto, $|X_{k-2}| \leq b_{k-2}$, o que implica

$$b_k = |B_k| = |X_{k-2}| + |I_k| \leq b_{k-2} + 2^{k-1}.$$

Por outro lado, se Y_{k-2} é qualquer subconjunto bom de $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{k-2}\}$ temos que $Y_{k-2} \cup I_k$ é bom (pois, para todo $y \in Y_{k-2}$, temos $2y \notin I_k$). Em particular, tomando Y_{k-2} com a maior quantidade de elementos possível, ou seja, b_{k-2}, segue que $b_k \geq |Y_{k-2} \cup I_k| = b_{k-2} + 2^{k-1}$.

Para o item (b), veja que a recorrência do item (a) implica (pois a soma é telescópica)

$$b_{2n+1} = (2^{2n} + 2^{2n-2} + \cdots + 2^2) + b_1 \text{ e } b_{2n} = (2^{2n-1} + 2^{2n-3} + \cdots + 2^1) + b_0.$$

Como $b_0 = b_1 = 1$, calculando a soma de cada PG acima e comparando os resultados, conclui-se que

$$b_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

□

Solução 2. Para $k = 1$ e $k = 2$, é imediato verificar que $|X|_{\max} = 1$ e $|X|_{\max} = 3$. Suponha, pois, que $k \geq 3$. Seja I um ímpar tal que $1 \leq I \leq 2^{k-1} - 1$. Para cada um de tais I, definamos $A_I = \{2^t I \in A\}$. Então, se $I_1 \neq I_2$, temos $A_{I_1} \cap A_{I_2} = \emptyset$. Além disso, se $x_1 \in A_{I_1}$ e $x_2 \in A_{I_2}$, então $x_1 \neq 2x_2$ e $x_2 \neq 2x_1$. Agora,

$$A = \bigcup_{I=1}^{2^{k-1}-1} A_I \cup \{2^{k-1} + 1, 2^{k-1} + 3, \ldots, 2^k - 1\},$$

onde o índice I varia sobre os ímpares do intervalo em questão. Então, se queremos que um conjunto $X \subset A$, com a propriedade do enunciado, tenha o maior número possível de elementos, podemos supor que $\{2^{k-1}+1, 2^{k-1}+3, \ldots, 2^k-1\} \subset X$. Também, para cada ímpar $1 \leq I \leq 2^{k-1}-1$, no máximo metade ou $\lfloor$metade$\rfloor + 1$ dos elementos de A_I pode estar em X; calculemos tal quantidade explicitamente. Se $A_I = \{I, 2I, 2^2I, \ldots, 2^tI\}$, então $|A_I| = t+1$ e no máximo $\lfloor\frac{(t+1)-1}{2}\rfloor + 1$ elementos de A_I podem estar em X. Mas, como $A_I \subset A$, temos $2^tI \leq 2^k$, de sorte que $t = k - \lfloor\log_2 I\rfloor$. Agora, se $I = 1$, temos $t = k$ e $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor + 1$ elementos de A podem estar em X. Se $I \geq 3$, então existe um único $a \in \mathbb{N}$ tal que $2^a < I < 2^{a+1}$, o que nos dá $t = k - \lfloor\log_2 I\rfloor = k-a-1$, e temos no máximo $\lfloor\frac{k-a-1}{2}\rfloor + 1$ elementos de A_I em X. Agora, como $\#\{2^{k-1}+1, 2^{k-1}+3, \ldots, 2^k-1\} = 2^{k-2}$ e como há 2^{a-1} ímpares entre 2^a e 2^{a+1}, concluímos que o maior número possível de elementos de um subconjunto bom $X \subset A$ é

$$S = 2^{k-2} + \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor + 1 + \sum_{a=1}^{k-2} 2^{a-1}\left(\left\lfloor\frac{k-a-1}{2}\right\rfloor + 1\right).$$

Se k for par, então

$$S = 2^{k-2} + \frac{k}{2} + 1 + \sum_{a=1}^{k-2} 2^{a-1}\left(\frac{k}{2} - \left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right) + \sum_{a=1}^{k-2} 2^{a-1}.$$

Escrevendo o primeiro somatório acima como a soma dos somatórios correspondentes sobre os $1 \leq a \leq k-2$ pares e ímpares, concluímos facilmente que $S = \frac{2^{k+1}+1}{3}$. Se k for ímpar, obtemos, analogamente, $S = \frac{2^{k+1}-1}{3}$. Em qualquer caso, temos $S = \frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3}$. $\square$