XXXV Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 3 - Ensino Médio

Reservado para a correção

Prova		Probl. 1	Probl. 2	Probl. 3	Probl. 4	Probl. 5	Total
# 3000	**Nota**						

- -

Instruções e Regulamento:

1. Identifique a prova somente no local indicado da capa.
2. Use o verso de cada folha como rascunho.
3. Verifique se sua prova está completa. A prova consta de 5 (cinco) problemas.
4. Somente serão consideradas as soluções escritas no espaço reservado para tal. Para escrevê-las, utilize caneta azul ou preta.
5. Cada problema vale 10 pontos.
6. O tempo de prova é de **4 horas**. Nenhum candidato poderá sair antes de completados 30 minutos de prova.
7. Não serão concedidas revisões de prova.
8. As soluções e os premiados serão divulgados oficialmente no sítio **www.mat.ufc.br/ocm**, até o dia 30/11/2015.

Identificação: Prova #3000

Nome:	
Endereço:	
E-mail:	**Telefone:**
Escola:	**Série:**

Problema 1. Um inteiro positivo n diz-se *invocado* se existem n inteiros positivos $a_1, \ldots, a_n$, dois a dois distintos, tais que

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

O inteiro positivo 3, por exemplo, é invocado, visto que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Mostre que todo inteiro $n > 2$ é invocado.

Problema 2. Seja n um inteiro positivo.

(a) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1.$$

(b) Mostre que todo inteiro $k \in \{0, 1, \ldots, (n+1)! - 1\}$ pode ser escrito na forma

$$k = \sum_{i=1}^{n} a_i(i!),$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são inteiros tais que $0 \leq a_i \leq i$, $i = 1, \ldots, n$.

Problema 3. Se P e Q são pontos do plano, denotamos por $|\overline{PQ}|$ o comprimento do segmento $\overline{PQ}$.

Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$. Se p é o comprimento comum das bissetrizes internas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$, prove que

$$\frac{2}{3}|\overline{BC}| < p < \sqrt{2}|\overline{BC}|.$$

Problema 4. Se X é um conjunto finito, denotamos por $|X|$ a quantidade de elementos de X.

Seja n um inteiro positivo e seja A um conjunto formado por n números reais positivos. Dado um subconjunto B de A, denotamos por $s(B)$ a soma dos elementos de B (se $B = \varnothing$, então $s(B) = 0$) e denotamos por F_A o conjunto

$$F_A = \{s(B);\ B \subset A\}.$$

Determine, em função de n, o menor valor possível e o maior valor possível para $|F_A|$.

Problema 5. Considere o conjunto

$$\mathcal{B} = \{a^2 + 3b^2;\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que se $n \in \mathcal{B}$ e p é um fator primo de n tal que $p \in \mathcal{B}$, então $\dfrac{n}{p} \in \mathcal{B}$.