XXXVI Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 3 - Ensino Médio

Problema 1. Sejam x e y números reais tais que $x^n + y^n$ é racional para $n = 2, 3, 4$ e 5.

(a) Mostre que $(xy)^2$ é racional.

(b) Mostre que $x + y$ é racional.

Problema 2. Encontre todos os números reais $x \in [-2016, 2016]$ tais que existe uma matriz 11×11 com entradas no conjunto $\{-1, 1\}$ e com determinante igual a x.

Problema 3. Se P e Q são pontos do plano, denotamos por $\overline{PQ}$ o comprimento do segmento PQ.

Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$. Denote por I o incentro de ABC e denote por D, E e F, respectivamente, os pontos onde o círculo inscrito em ABC toca os lados BC, CA e AB. Seja X a interseção das retas $\overleftrightarrow{DI}$ e $\overleftrightarrow{EF}$. Calcule, em função de a, b e c, as razões

$$\frac{\overline{EX}}{\overline{XF}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{DI}}{\overline{IX}}.$$

Problema 4. A sequência de Fibonacci $(F_1, F_2, F_3, \ldots)$ é definida de seguinte forma: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e, para $m \geq 3$, $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$.

Seja k um inteiro positivo. Mostre que existe um inteiro positivo n tal que o número de Fibonacci F_n é divisível por k.

Problema 5. São dados $2n + 1$ pontos sobre um círculo, tais que dois quaisquer deles não são extremidades de um mesmo diâmetro. Prove que, dentre os triângulos que têm três desses $2n + 1$ pontos por vértices, no máximo

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

são acutângulos. (Nota: por *círculo* de centro O e raio r entendemos o conjunto formado pelos pontos do plano que estão à distância r do ponto O.)