XXXVII Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 3 - Ensino Médio

Problema 1. Um inteiro positivo q é dito um quadrado perfeito quando existe um inteiro positivo k tal que $q = k^2$. Por exemplo, 9 e 64 são quadrados perfeitos, pois $9 = 3^2$ e $64 = 8^2$.

Mostre que não existe quadrado perfeito de oito algarismos cujos quatro algarismos de mais alta ordem (os quatro primeiros da esquerda para a direita) são todos iguais a 9.

Problema 2. Tem-se seis jarras. Inicialmente, cinco delas contêm 2 litros de água e uma delas contém 1 litro de água. Um movimento permitido consiste em escolher duas das jarras e dividir a água contida nessas duas jarras em duas porções iguais. É possível que, após um número finito de movimentos, todas as seis jarras tenham a mesma quantidade de água? Justifique sua resposta.
(Nota: assuma que a capacidade de cada uma das seis jarras é maior que 2 litros e que nenhum líquido é desperdiçado ao se realizar uma operação permitida.)

Problema 3. João possui 4033 moedas honestas, sendo 2017 de ouro e 2016 de prata. Se João arremessar as 4033 moedas simultaneamente, qual a proprabilidade dele obter mais *caras* de ouro que *coroas* de prata?
(Nota: uma moeda honesta é uma moeda que, ao ser arremessada, tanto a probabilidade de se obter uma *cara* como a probabilidade de se obter uma *coroa* é igual a $0,5$.)

Problema 4. Faça os seguintes itens:

(a) Se nenhum dos naturais a_1, a_2, $\ldots$, a_n é um quadrado perfeito, mostre que

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}$$

é raiz de um polinômio $f(x)$ de grau 2^n, coeficientes inteiros e cujo coeficiente do monômio de maior grau é 1.

(b) Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$ é irracional.

Problema 5. Se P e Q são pontos do plano, denotamos por $\overline{PQ}$ o comprimento do segmento PQ.

Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB} = c$. Seja I o incentro de ABC e seja P um ponto no interior de ABC. Mostre que

$$a \cdot \overline{PA}^2 + b \cdot \overline{PB}^2 + c \cdot \overline{PC}^2 \geq a \cdot \overline{IA}^2 + b \cdot \overline{IB}^2 + c \cdot \overline{IC}^2,$$

com a igualdade ocorrendo somente se $P = I$.