XXXVIII Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 3 - Ensino Médio

Problema 1. Seja ABC um triângulo equilátero com lados de comprimento igual a 3 e seja D o ponto sobre o lado BC tal que o comprimento do segmento CD vale 1. Sejam M o ponto médio do segmento AD e Γ o círculo de centro M e tangente ao segmento AC. Se E é o ponto sobre o segmento AB tal que DE tangencia Γ, calcule o comprimento de BE. Justifique sua resposta.

Problema 2. Encontre, com justificativa, todos os inteiros positivos a, b e p, tais que p é primo e

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Problema 3. Considere o polinômio $M(x, y) = 1 - 3x^2y^2 + x^2y^4 + x^4y^2$. Prove que:

(a) $M(a, b) \geq 0$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) M não pode ser escrito como uma soma de quadrados de polinômios em x, y e com coeficientes reais.

Problema 4. Duas parábolas de eixos perpendiculares se intersectam em quatro pontos distintos, A, B, C e D. Prove que $ABCD$ é um quadrilátero inscritível.

Problema 5. Sejam k e n inteiros tais que $k \geq 3$ e $n > \binom{k}{3}$. Se a_i, b_i, c_i $(1 \leq i \leq n)$ são $3n$ números reais distintos, prove que há ao menos $k+1$ números distintos dentre os $3n$ números $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$. Mostre que essa afirmação não é necessariamente verdadeira se $n = \binom{k}{3}$.