

XXXIX Olimpíada Cearense de Matemática

Nível 3 – Ensino Médio

Problema 1. Tem-se várias peças com o formato de um retângulo 1×5 e várias peças com o formato de um quadrado 3×3 . Qual o *menor* inteiro positivo n tal que é possível cobrir totalmente um tabuleiro $n \times n$ utilizando pelo menos uma peça de cada um desses tipos e sem que haja sobreposição de peças? Justifique sua resposta.

Problema 2. Encontre os três últimos algarismos da representação decimal de 2019^{2019} . Justifique sua resposta.

Problema 3. A superfície de um planeta esférico é dividida entre os países de uma federação, de tal forma que nenhum país engloba outros países, cada país faz fronteira com exatamente três outros e nenhuma fronteira entre dois países se reduz a um ponto. Nesse planeta, uma “tríplice fronteira” é um ponto em que as fronteiras de três países se encontram. Por outro lado, uma “aliança geopolítica” é um grupo p_1, p_2, \dots, p_k de países, tal que p_i faz fronteira com p_{i+1} , para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ (com $p_{k+1} = p_1$). Sabendo que não há alianças geopolíticas com mais de cinco países, mostre que o planeta tem no máximo quatro tríplexes fronteiras. Além disso, mostre que a igualdade ocorre se, e só se, o planeta tiver exatamente quatro países.

Problema 4. Os lados e a altura de um trapézio são expressos por números inteiros. Mostre que o perímetro do trapézio é par e sua área é inteira.

Problema 5. São dados $n + 1$ pontos, P_1, \dots, P_n, P_{n+1} , em um plano, de forma que quaisquer três deles não são colineares. Cada segmento que liga dois dentre os pontos P_1, \dots, P_n foi colorido de azul, vermelho ou verde, de modo que não existe um triângulo com os três lados de cores diferentes. Mostre que o número de maneiras de colorir todos os segmentos $P_i P_{n+1}$, com $1 \leq i \leq n$, também com as cores azul, vermelho ou verde, e sem criar triângulos com os três lados de cores distintas é no máximo $2^{n+1} - 1$ e que esse máximo é atingido quando todos os segmentos entre P_1, \dots, P_n receberem uma mesma cor.