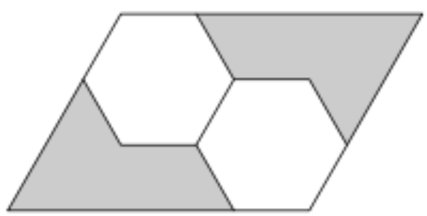
Olimpíada Cearense de Matemática (2021)
Fase 1 - Nível 3

1. Qual é o maior fator primo de $3^{12} - 1$?

   (a) 73
   (b) $3^6 + 1$
   (c) 107
   (d) 13
   (e) 949

2. Dois hexágonos regulares compartilham um lado e estão situados dentro de um paralelogramo, como indicado na figura. Sabe-se que a área do paralelogramo é 1. Quanto vale a soma das áreas das duas regiões cinza?



   (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{3}{7}$ (e) $\frac{1}{2}$

3. Uma pulga encontra-se na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Cada movimento da pulga consiste em escolher um dos três saltos a seguir:

   (i) pular de (x, y) para $(x, y + 5)$;
   (ii) pular de (x, y) para $(x - 2, y - 3)$;
   (iii) pular de (x, y) para $(x + 2, y - 9)$.

   Quantos caminhos distintos levam a pulga do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(0, 2016)$?

   (a) nenhum.
   (b) exatamente 1.
   (c) um número entre 5 e 20.
   (d) um número entre 21 e 100.
   (e) uma quantidade infinita.

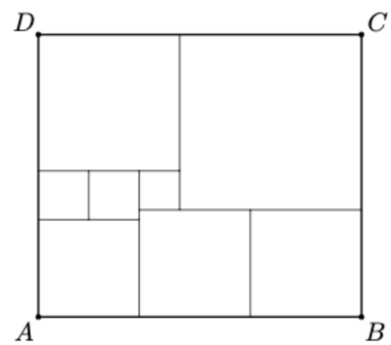
4. Dois dados vermelhos e um dado azul são jogados. Qual a probabilidade da soma dos números obtidos nos dados vermelhos ser igual ao número obtido no dado azul?

   (a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{2}{27}$ (c) $\frac{1}{15}$ (d) $\frac{1}{18}$ (e) $\frac{5}{72}$

5. Oito pessoas (duas usando camisa azul, duas usando camisa branca, duas usando camisa cinza e duas usando camisa dourada) vão formar quatro duplas para *truco*. De quantas maneiras eles podem formar as duplas de modo que em cada uma delas os dois membros estejam usando camisas de cores diferentes?

   (a) 90
   (b) 60
   (c) 5040
   (d) 21
   (e) 105

6. O retângulo $ABCD$ foi dividido em vários quadrados, como na figura. Sabe-se que o lado AB mede 16. Qual o comprimento do lado AD?



   (a) $\frac{29}{2}$
   (b) 12
   (c) $\frac{105}{8}$
   (d) 17
   (e) $\frac{61}{4}$

7. Dados inteiros n e k, com $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n$, definimos o seguinte polinômio de grau $n-1$:

$$p(x) = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{(x+k)}.$$

Por exemplo, se $n = 5$ e $k = 2$, então $p(x) = (x+1)(x+3)(x+4)(x+5)$. Suponha que, para certos n e k, o coeficiente de x^{n-2} no polinômio $p(x)$ é igual a 67. Qual é, neste caso, o valor de n?

(a) 68 (b) 10 (c) 12 (d) 11 (e) 69

8. Cinco suspeitos de um crime, Ana, João, Maria, José e Antônio, são presos em uma investigação criminal. Ao chegarem à delegacia, cada um deles fala uma frase:

Ana: "Somos todos inocentes."

João: "Exatamente um de nós é inocente."

Maria: "Exatamente um de nós é culpado."

José: "Pelo menos dois de nós são inocentes."

Antônio: "Pelo menos dois de nós são culpados."

Sabe-se que os culpados mentiram e que os inocentes disseram a verdade. Quantos culpados há?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

9. Em um planeta distante existe um país chamado Lagartolândia, cuja moeda se chama calango. Em Lagartolândia, as transações comerciais são feitas usando-se cédulas de 1 calango, 2 calangos, 10 calangos, 20 calangos e 50 calangos (não existem cédulas ou moedas de outro valor). Qual o maior valor, em calangos, que um habitante de Lagartolândia pode ter consigo se ele não consegue comprar um objeto que custa 100 calangos sem ter que receber troco?

(a) 99

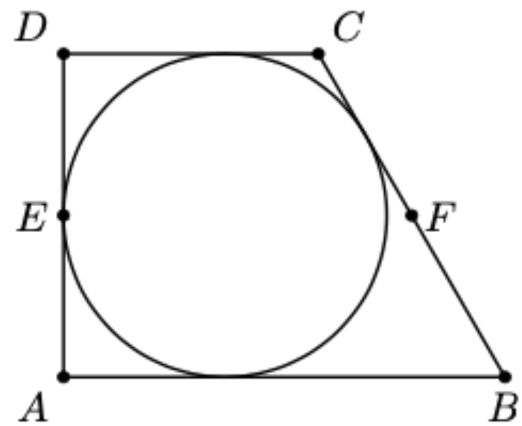
(b) 119

(c) 139

(d) 159

(e) 179

10. O quadriátero circunscritível $ABCD$ é tal que $B\widehat{A}D = A\widehat{D}C = 90°$. O círculo inscrito no quadrilátero possui raio 10 e o comprimento do lado BC é 24. Sejam E e F os pontos médios dos lados AD e BC. Qual é o comprimento do segmento EF?



(a) $\frac{43}{2}$

(b) $\frac{13}{2}\sqrt{11}$

(c) $\frac{33}{5}\sqrt{11}$

(d) 22

(e) $\frac{45}{2}$

11. Ernesto quer compor uma lista de inteiros. A representação decimal de cada um dos inteiros da lista deve conter um ou mais dos algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Além disso, ambas as condições a seguir precisam ser satisfeitas:

(i) Cada um dos algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ aparece em exatamente um número da lista;

(ii) Nenhum inteiro da lista é divisível por outro inteiro da lista.

Qual é a maior quantidade possível de inteiros na lista de Ernesto?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

12. Uma tripla pitagórica é um conjunto de três números naturais $a < b < c$ tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Existe exatamente uma tripla pitagórica tal que $a + b + c = 40$. Quanto vale abc?

    (a) 2160
    (b) 2040
    (c) 910
    (d) 2244
    (e) 420

13. Seja ABC um triângulo com lados 3, 4 e 5 e seja $DEFG$ um retângulo com lados 6 e 7. Uma reta divide ABC em um triângulo T_1 e um trapézio R_1. Outra reta divide $DEFG$ em um triângulo T_2 e um trapézio R_2, de modo que T_1 e T_2 são triângulos semelhantes e R_1 e R_2 são trapézios semelhantes. Seja x o menor valor possível para a área de T_1. Ao escrevermos $x = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si, qual o valor de $p + q$?

    (a) 32 (b) 33 (c) 34 (d) 35 (e) 36

14. De quantas maneiras podemos escolher três números a, b, c do conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tais que existe um triângulo escaleno não-degenerado com comprimentos dos lados iguais a a, b, c?

    (a) 28
    (b) 29
    (c) 30
    (d) 35
    (e) 343

15. Um poliedro convexo é tal que cada uma de suas faces é um quadrado de lado 1 ou um triângulo equilátero de lado 1. Sabe-se que cada um dos vértices do poliedro pertence a exatamente duas faces quadrangulares e duas faces triangulares. Quantos vértices o poliedro possui?

    (a) 9 (b) 10 (c) 12 (d) 14 (e) 16

Gabarito

1 (a)	**6 (a)**	**11 Nula**
2 (e)	**7 (c)**	**12 (b)**
3 (e)	**8 (c)**	**13 (d)**
4 (e)	**9 (c)**	**14 (a)**
5 (b)	**10 (d)**	**15 (c)**