UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação em Análise

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

18 de Agosto de 2014

Candidato: ____

Importante:

1. Apresente suas soluções de forma clara e bem organizada.
2. Argumentos devem ser cuidadosamente justificaados para serem elegíveie à pontuação.

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que existe uma constante M tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ (i.e., f é *Lipschitziana*) se, e somente se, f é absolutamente contínua e $|f'(x)| \leq M$, para q.t.p. $x \in \mathbb{R}$.

Você consegue exibir uma função real que tem derivada q.t.p.-limitada e não é *Lipschitziana*?

Questão 2. Sejam $(X, \mathbb{M}, \mu)$ e $(Y, \mathbb{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finita e K uma função $(\mathbb{M} \otimes \mathbb{N})$-mensurável tal que $\int |K(x,y)| \, d\mu(x) \leq C$, para q.t.p. $y \in Y$ e $\int |K(x,y)| \, d\nu(y) \leq C$, para q.t.p. $x \in X$. Prove que se $1 < p < \infty$ e $f \in L^p$, então a função

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) \, d\nu(y), \ x \in X,$$

está em L^p e $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$.

Use o resultado acima para concluir que se $g \in L^1$ e $h \in L^p$ $(1 < p < \infty)$, então

$$g * h \in L^p \ \text{ e } \ \|g * h\|_p \leq \|g\|_1 \|h\|_p.$$

Questão 3. Mostre que

a) se $f, g \in \mathcal{S}$, então $f * g \in \mathcal{S}$.

b) se $f, g \in L^1$, então $(f * g)^\wedge = f^\wedge \cdot g^\wedge$.

c) se $f \in L^1$ e T é uma rotação, então $(f \circ T)^\wedge = f^\wedge \circ T$.

Questão 4. Mostre como resolver, usando transformada de Fourier, a equação do calor

$$(\partial_t - \Delta) u = 0$$

em $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ sujeita à condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, obtendo assim a solução clássica

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) \, dy.$$

Questão 5. (a) Seja $\mathcal{N}$ espaço formado com $\dim(\mathcal{N}) = +\infty$. Mostre que qualquer subconjunto que contém um aberto não vazio não é compacto;

(b) Sejam $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ espaços de Banach e $T\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ operador linear limitado sobrejetivo tal que $T(B(0,r))$ está contido em um compacto $\forall\, r > 0$. Mostre que $\dim(\mathcal{E}) < \infty$.

Questão 6. Seja $\Omega = (0,1)$, $\alpha > 0$ e

$$u_n(x) = \begin{cases} n^\alpha, & \text{se} \quad x \in (0, 1/n) \\ 0, & \text{se} \quad x \in (1/n, 1) \end{cases}$$

Mostre que, se $1 < p < \infty$ então

$$u_n \to 0 \quad \text{in } L^p \Leftrightarrow 0 \le \alpha < \frac{1}{p};$$

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^p \Leftrightarrow 0 \le \alpha \le \frac{1}{p};$$

Questão 7. Seja $T\colon L^2([0,1]) \to C([0,1])$ um operador linear contínuo. Mostre que $T(B_1)$ é um conjunto pré-compacto em $L^2([0,1])$, isto é, toda sequênica em $T(B_1)$ possui subsequênica que converge em $L^2([0,1])$.