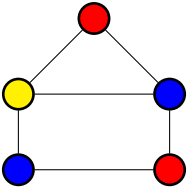
Colorações baseadas em heurísticas

Ana Silva

ParGO – Paralelismo, Grafos e Otimização
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Ceará

Definições básicas

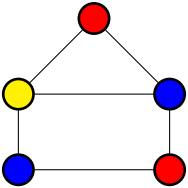
Coloração



Grafos simples

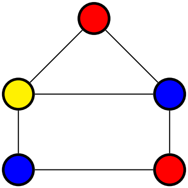
1. $V(G) \neq \emptyset$ finito, não direcionado, sem loops e sem arestas múltiplas;
2. $f : V(G) \to \mathbb{N}$ t.q. $f(u) \neq f(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$;
3. $\chi(G) = \min k$ t.q. existe col. própria de G com k cores;
4. Dado G e $k \in \mathbb{N}$, decidir $\chi(G) \leq k$.

Coloração



Coloração Própria

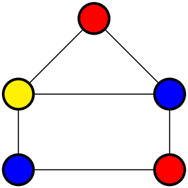
1. $V(G) \neq \emptyset$ finito, não direcionado, sem loops e sem arestas múltiplas;
2. $f : V(G) \to \mathbb{N}$ t.q. $f(u) \neq f(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$;
3. $\chi(G) = \min k$ t.q. existe col. própria de G com k cores;
4. Dado G e $k \in \mathbb{N}$, decidir $\chi(G) \leq k$.



Número cromático

1. $V(G) \neq \emptyset$ finito, não direcionado, sem loops e sem arestas múltiplas;
2. $f : V(G) \to \mathbb{N}$ t.q. $f(u) \neq f(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$;
3. $\chi(G) = \min k$ t.q. existe col. própria de G com k cores;
4. Dado G e $k \in \mathbb{N}$, decidir $\chi(G) \leq k$.

Coloração



Problema de Decisão

1. $V(G) \neq \emptyset$ finito, não direcionado, sem loops e sem arestas múltiplas;
2. $f : V(G) \to \mathbb{N}$ t.q. $f(u) \neq f(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$;
3. $\chi(G) = \min k$ t.q. existe col. própria de G com k cores;
4. Dado G e $k \in \mathbb{N}$, decidir $\chi(G) \leq k$.

Um dos 21 Problemas de Karp

- NP-completo, mesmo para k fixo, $k \geq 3$;
- Impossível de aproximar por um fator constante, a menos que P $=$ NP;

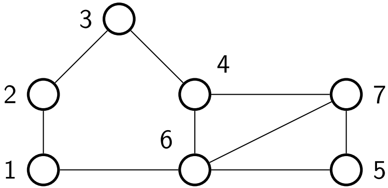
Richard Karp.
Reducibility among Combinatorial Problems.
In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations. New York: Plenum. pp. 85–103, 1972.

Um dos 21 Problemas de Karp

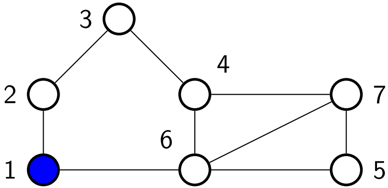
- NP-completo, mesmo para k fixo, $k \geq 3$;
- Impossível de aproximar por um fator constante, a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$;

Lund e Yannakakis.
On the hardness of approximating minimization problems.
J. of the ACM 41 (1994) 960–981.

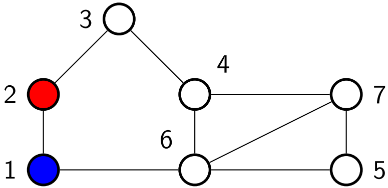
Heurística Gulosa



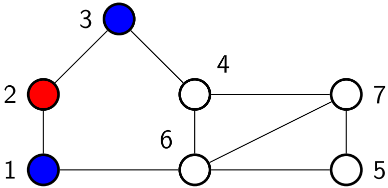
Heurística Gulosa



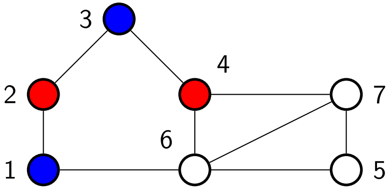
Heurística Gulosa



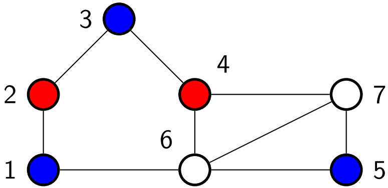
Heurística Gulosa



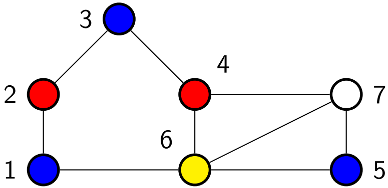
Heurística Gulosa



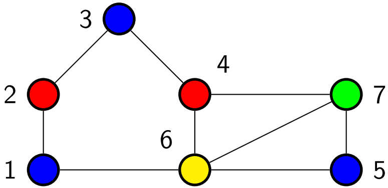
Heurística Gulosa

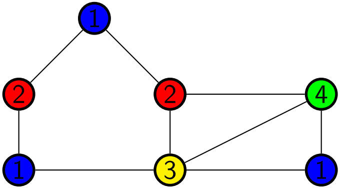


Heurística Gulosa



Heurística Gulosa



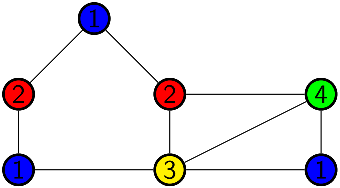


Dada $f : V(G) \to \mathbb{N}$ própria

Vértice Guloso

1. v é guloso se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i < f(v)$;
2. f é col. gulosa se todo $v \in V(G)$ é guloso;
3. $\Gamma(G) = \max k$ t.q. existe f gulosa de G com k cores.

Heurística Gulosa

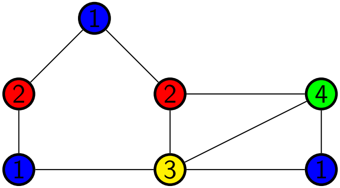


Dada $f : V(G) \to \mathbb{N}$ própria

Coloração Gulosa

1. v é guloso se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i < f(v)$;
2. f é col. gulosa se todo $v \in V(G)$ é guloso;
3. $\Gamma(G) = \max k$ t.q. existe f gulosa de G com k cores.

Heurística Gulosa

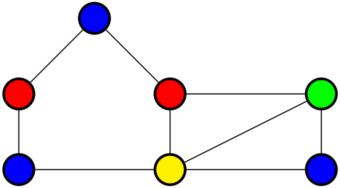


Dada $f : V(G) \to \mathbb{N}$ própria

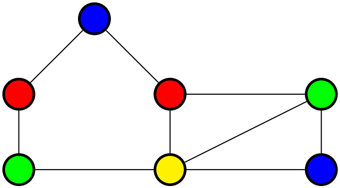
Número de Grundy

1. v é guloso se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i < f(v)$;
2. f é col. gulosa se todo $v \in V(G)$ é guloso;
3. $\Gamma(G) = \max k$ t.q. existe f gulosa de G com k cores.

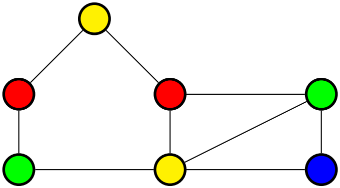
Heurística b



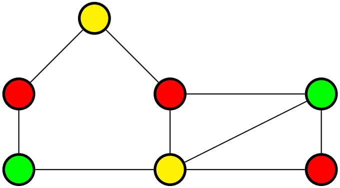
Heurística b



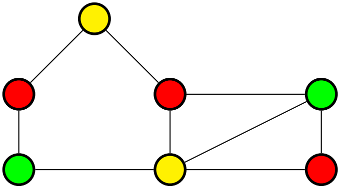
Heurística b



Heurística b



Heurística b

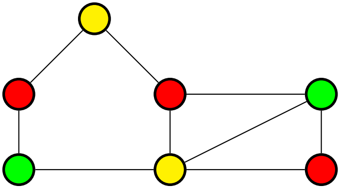


Dada $f : V(G) \to \mathbb{N}$ própria

b-vértice

1. v é b-vértice se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i \neq f(v)$;
2. f é b-coloração se *existe* b-vértice em toda cor i;
3. $b(G) = \max k$ t.q. existe b-coloração de G com k cores.

Heurística b

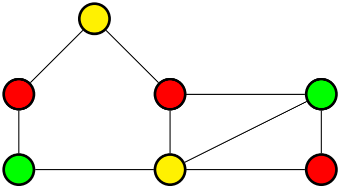


Dada $f : V(G) \to \mathbb{N}$ própria

b-coloração

1. v é b-vértice se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i \neq f(v)$;
2. f é b-coloração se *existe* b-vértice em toda cor i;
3. $b(G) = \max k$ t.q. existe b-coloração de G com k cores.

Heurística b

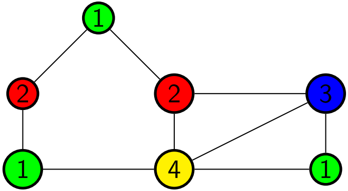


Dada $f : V(G) \to \mathbb{N}$ própria

Número b-cromático

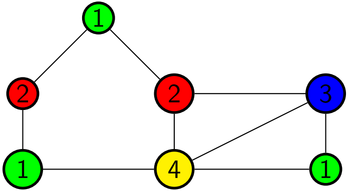
1. v é b-vértice se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i \neq f(v)$;
2. f é b-coloração se *existe* b-vértice em toda cor i;
3. $b(G) = \max k$ t.q. existe b-coloração de G com k cores.

Colorações derivadas - Gulosa parcial



Vértice Guloso

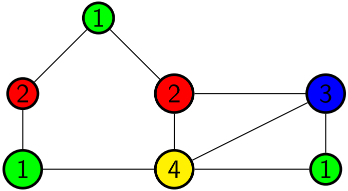
1. v é guloso se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i < f(v)$;
2. f é col. gulosa parcial se *existe* guloso v guloso em toda cor i;
3. $\partial\Gamma(G) = \max k$ t.q. existe f gulosa parcial de G com k cores.



Coloração Gulosa Parcial

1. v é guloso se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i < f(v)$;
2. f é col. gulosa parcial se *existe* guloso v guloso em toda cor i;
3. $\partial\Gamma(G) = \max k$ t.q. existe f gulosa parcial de G com k cores.

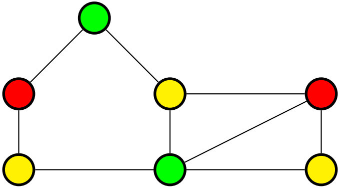
Colorações derivadas - Gulosa parcial



Número Parcial de Grundy

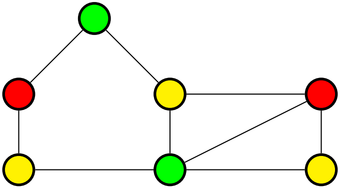
1. v é guloso se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i < f(v)$;
2. f é col. gulosa parcial se *existe* guloso v guloso em toda cor i;
3. $\partial\Gamma(G) = \max k$ t.q. existe f gulosa parcial de G com k cores.

Colorações derivadas - Fall-coloração



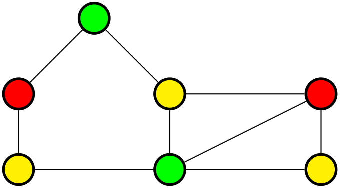
b-vértice

1. v é b-vértice se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i \neq f(v)$;
2. f é fall-coloração se *todo* $v \in V(G)$ é b-vértice;
3. $\Psi(G) = \max k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores;
4. $\psi(G) = \min k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores.



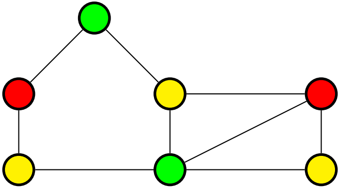
fall-Coloração

1. v é b-vértice se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i \neq f(v)$;
2. f é fall-coloração se *todo* $v \in V(G)$ é b-vértice;
3. $\Psi(G) = \max k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores;
4. $\psi(G) = \min k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores.



Número fall-acromático

1. v é b-vértice se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i \neq f(v)$;
2. f é fall-coloração se *todo* $v \in V(G)$ é b-vértice;
3. $\Psi(G) = \max k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores;
4. $\psi(G) = \min k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores.



Número fall-cromático

1. v é b-vértice se $N(v) \cap f^{-1}(i) \neq \emptyset$ para toda cor $i \neq f(v)$;
2. f é fall-coloração se *todo* $v \in V(G)$ é b-vértice;
3. $\Psi(G) = \max k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores;
4. $\psi(G) = \min k$ t.q. existe fall-coloração de G com k cores.

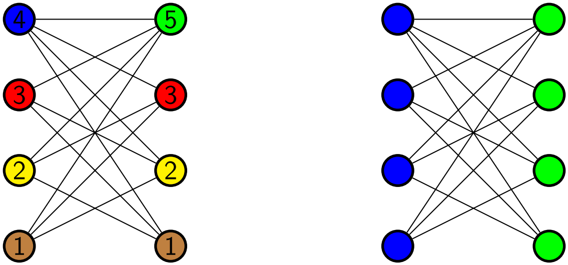


Figura : $\Gamma(G) = 5$ e $b(G) = 2$.

$\Gamma(G)$ e $b(G)$ são incomparáveis

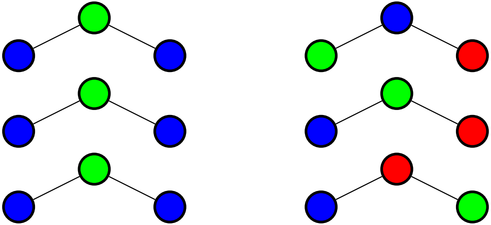


Figura : $\Gamma(G) = 2$ e $b(G) = 3$.

Como se relacionam

$$\chi(G) \leq \begin{matrix} \Gamma(G) \\ b(G) \end{matrix} \leq \partial\Gamma(G).$$

$$\chi(G) \leq \psi(G) \leq \Psi(G) \leq b(G) \leq \partial\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

$$\psi(G) \leq \Psi(G) \leq \delta(G) + 1.$$

($\Rightarrow$ se $\chi(G) > \delta(G) + 1$, não existem fall-colorações de G).

Fall-espectro

$$\mathcal{F}(G) = \{k \mid G \text{ tem fall-coloração com } k \text{ cores}\}$$

Como se relacionam

$$\chi(G) \leq \begin{array}{c}\Gamma(G)\\ b(G)\end{array} \leq \partial\Gamma(G).$$

$$\chi(G) \leq \psi(G) \leq \Psi(G) \leq b(G) \leq \partial\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

$$\psi(G) \leq \Psi(G) \leq \delta(G) + 1.$$

($\Rightarrow$ se $\chi(G) > \delta(G) + 1$, não existem fall-colorações de G).

Fall-espectro

$$\mathcal{F}(G) = \{k \mid G \text{ tem fall-coloração com } k \text{ cores}\}$$

Como se relacionam

$$\chi(G) \leq \begin{array}{c}\Gamma(G) \\ b(G)\end{array} \leq \partial\Gamma(G).$$

$$\chi(G) \leq \psi(G) \leq \Psi(G) \leq b(G) \leq \partial\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

$$\psi(G) \leq \Psi(G) \leq \delta(G) + 1.$$

($\Rightarrow$ se $\chi(G) > \delta(G) + 1$, não existem fall-colorações de G).

Fall-espectro

$$\mathcal{F}(G) = \{k \mid G \text{ tem fall-coloração com } k \text{ cores}\}$$

Como se relacionam

$$\chi(G) \leq \begin{matrix} \Gamma(G) \\ b(G) \end{matrix} \leq \partial\Gamma(G).$$

$$\chi(G) \leq \psi(G) \leq \Psi(G) \leq b(G) \leq \partial\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

$$\psi(G) \leq \Psi(G) \leq \delta(G) + 1.$$

($\Rightarrow$ se $\chi(G) > \delta(G) + 1$, não existem fall-colorações de G).

Fall-espectro

$$\mathcal{F}(G) = \{k \mid G \text{ tem fall-coloração com } k \text{ cores}\}$$

Limites superiores mais refinados

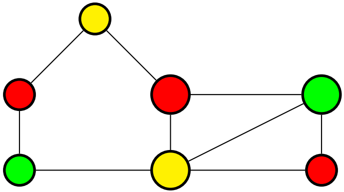


Figura : 3 vértices de grau ao menos 3; demais de grau 2.

- Se G tem uma b-coloração com k cores, então existem k vértices de grau $\geq k-1$;

  $m(G) = \max k$ t.q. G tem ao menos k vértices de grau $\geq k-1$;

$$b(G) \leq m(G).$$

Limites superiores mais refinados

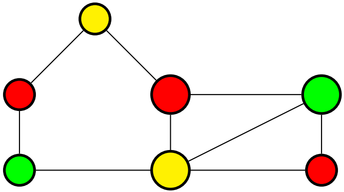


Figura : 3 vértices de grau ao menos 3; demais de grau 2.

- Se G tem uma b-coloração com k cores, então existem k vértices de grau $\geq k-1$;

  $m(G) = \max k$ t.q. G tem ao menos k vértices de grau $\geq k-1$;

$$b(G) \leq m(G).$$

Limites superiores mais refinados

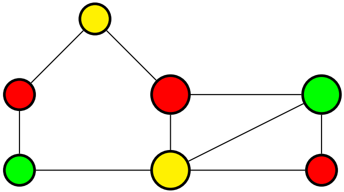


Figura : 3 vértices de grau ao menos 3; demais de grau 2.

- Se G tem uma b-coloração com k cores, então existem k vértices de grau $\geq k-1$;

  $m(G) = \max k$ t.q. G tem ao menos k vértices de grau $\geq k-1$;

$$b(G) \leq m(G).$$

Limites superiores mais refinados

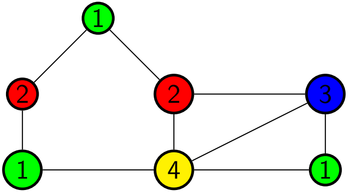


Figura : Algum vértice da cor i tem vizinhos de cor $\{1, \ldots, i-1\}$.

- Se G tem uma col. de Grundy parcial com k cores, então existe uma sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ onde v_i tem ao menos $i-1$ vizinhos em $G - \{v_{i+1}, \ldots, v_k\}$;

  $p(G) = \max k$ t.q. existe uma tal sequência;

$$\partial\Gamma(G) \leq p(G).$$

Limites superiores mais refinados

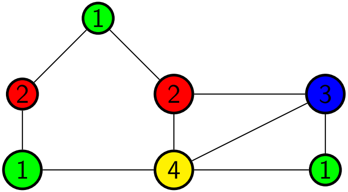


Figura : Algum vértice da cor i tem vizinhos de cor $\{1, \ldots, i-1\}$.

- Se G tem uma col. de Grundy parcial com k cores, então existe uma sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ onde v_i tem ao menos $i-1$ vizinhos em $G - \{v_{i+1}, \ldots, v_k\}$;

  $p(G) = \max k$ t.q. existe uma tal sequência;

$$\partial\Gamma(G) \leq p(G).$$

Limites superiores mais refinados

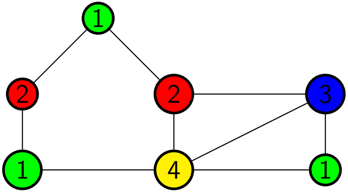


Figura : Algum vértice da cor i tem vizinhos de cor $\{1, \ldots, i-1\}$.

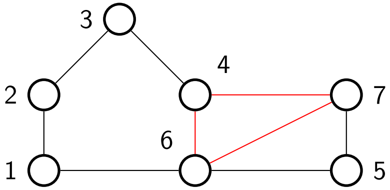
- Se G tem uma col. de Grundy parcial com k cores, então existe uma sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ onde v_i tem ao menos $i-1$ vizinhos em $G - \{v_{i+1}, \ldots, v_k\}$;
  $p(G) = \max k$ t.q. existe uma tal sequência;

$$\partial\Gamma(G) \leq p(G).$$

Grafos com cintura alta

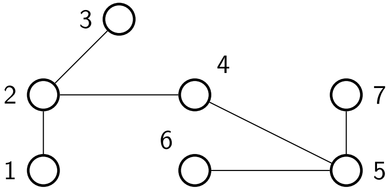
Grafos com cintura alta são fáceis

cintura: tamanho do menor ciclo do grafo.



Grafos com cintura alta são fáceis

cintura: tamanho do menor ciclo do grafo.



Árvores (grafos conexos acíclicos) tem cintura “infinita”;

Grafos com cintura alta são fáceis

Teorema (Irving e Manlove, 1999)

Se T é uma árvore, então $b(T) \geq m(T) - 1$ e é polinomial calcular $b(T)$.

Irving and Manlove.
The b-chromatic number of a graph.
Discrete App. Math. 91 (1999) 127–141.

Grafos com cintura alta são fáceis

Teorema (Irving e Manlove, 1999)

Se T é uma árvore, então $b(T) \geq m(T) - 1$ e é polinomial calcular $b(T)$.

Teorema (Kouider e Sahili, 2006)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e sem C_6, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

M. Kouider e A. E. Sahili.
b-chromatic number of a graph, subgraphs and degrees.
Thechnical report, Université Paris Sud, 2006.

Grafos com cintura alta são fáceis

Teorema (Irving e Manlove, 1999)

Se T é uma árvore, então $b(T) \geq m(T) - 1$ e é polinomial calcular $b(T)$.

Teorema (Kouider e Sahili, 2006)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e sem C_6, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

Teorema (Cabello e Jakovac, 2011)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5, então $b(G) \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$.

S. Cabello e M. Jakovac
On the b-chromatic number of regular graphs.
Discrete Appl. Math. 159 (2011) 1303–1310.

Grafos com cintura alta são fáceis

Teorema (Irving e Manlove, 1999)

Se T é uma árvore, então $b(T) \geq m(T) - 1$ e é polinomial calcular $b(T)$.

Teorema (Kouider e Sahili, 2006)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e sem C_6, então $b(G) = m(G) = d + 1$.

Teorema (Cabello e Jakovac, 2011)

Se G é d-regular com cintura ≥ 5, então $b(G) \geq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$.

Teorema (Campos, Lima e S., 2010)

Se G tem cintura ao menos 7, então $b(G) \geq m(G) - 1$ e é polinomial calcular $b(G)$.

Campos, Lima and **Silva**.
Graphs with girth at least 7 have high b-chromatic number.
European J. Combinatorics 48 (2015) 154–164.

Grafos com cintura alta são fáceis

Teorema (Shi et al., 2005)

Se G tem cintura ao menos 9, então $\partial\Gamma(G) = p(G)$ e é polinomial encontrar uma coloração gulosa parcial com $p(G)$ cores.

Shi, Goddard, Hedetniemi, Kennedy, Laskar e McRae.
An algorithm for Parial Grundy Number on Trees.
Discrete Math. 304 (2005) 108–116.

Grafos com cintura alta são fáceis

Teorema (Shi et al., 2005)

Se G tem cintura ao menos 9, então $\partial\Gamma(G) = p(G)$ e é polinomial encontrar uma coloração gulosa parcial com $p(G)$ cores.

Teorema (Hedetniemi, Hedetniemi e Beyer, 1982)

Calcular $\Gamma(T)$, onde T é uma árvore, pode ser feito em tempo linear.

S.M Hedetniemi, S.T. Hedetniemi e T. Beyer.
A linear time algorithm for the grundy (coloring) number of a tree
Congressus Numerantium 36 (1982) 351–363.

Grafos com cintura alta são fáceis

Teorema (Shi et al., 2005)

Se G tem cintura ao menos 9, então $\partial\Gamma(G) = p(G)$ e é polinomial encontrar uma coloração gulosa parcial com $p(G)$ cores.

Teorema (Hedetniemi, Hedetniemi e Beyer, 1982)

Calcular $\Gamma(T)$, onde T é uma árvore, pode ser feito em tempo linear.

Proposição (folclore)

Se T é uma árvore com $|V(T)| \geq 2$, então $\psi(T) = \Psi(T) = 2$.

S.M Hedetniemi, S.T. Hedetniemi e T. Beyer.
A linear time algorithm for the grundy (coloring) number of a tree
Congressus Numerantium 36 (1982) 351–363.

Grafos com cintura alta - o que não sabemos

- Existe c t.q. calcular $\Gamma(G)$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Existe c t.q. decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Qual o menor valor g^* tal que $b(G) \geq m(G) - 1$ quando G tem cintura $\geq g^*$?

$$5 \leq g^* \leq 7.$$

- Qual o menor valor $\hat{g}$ tal que $\partial\Gamma(G) \geq p(G)$ quando G tem cintura $\geq \hat{g}$?

$$5 \leq \hat{g} \leq 9.$$

- (Conjectura Blidia, Maffray e Zemir, 2009) Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e não é o grafo de Petersen, então $b(G) = d + 1$.

Grafos com cintura alta - o que não sabemos

- Existe c t.q. calcular $\Gamma(G)$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Existe c t.q. decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Qual o menor valor g^* tal que $b(G) \geq m(G) - 1$ quando G tem cintura $\geq g^*$?

$$5 \leq g^* \leq 7.$$

- Qual o menor valor $\hat{g}$ tal que $\partial\Gamma(G) \geq p(G)$ quando G tem cintura $\geq \hat{g}$?

$$5 \leq \hat{g} \leq 9.$$

- (Conjectura Blidia, Maffray e Zemir, 2009) Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e não é o grafo de Petersen, então $b(G) = d + 1$.

Grafos com cintura alta - o que não sabemos

- Existe c t.q. calcular $\Gamma(G)$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Existe c t.q. decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Qual o menor valor g^* tal que $b(G) \geq m(G) - 1$ quando G tem cintura $\geq g^*$?

$$5 \leq g^* \leq 7.$$

- Qual o menor valor $\hat{g}$ tal que $\partial\Gamma(G) \geq p(G)$ quando G tem cintura $\geq \hat{g}$?

$$5 \leq \hat{g} \leq 9.$$

- (Conjectura Blidia, Maffray e Zemir, 2009) Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e não é o grafo de Petersen, então $b(G) = d + 1$.

Grafos com cintura alta - o que não sabemos

- Existe c t.q. calcular $\Gamma(G)$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Existe c t.q. decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Qual o menor valor g^* tal que $b(G) \geq m(G) - 1$ quando G tem cintura $\geq g^*$?

$$5 \leq g^* \leq 7.$$

- Qual o menor valor $\hat{g}$ tal que $\partial\Gamma(G) \geq p(G)$ quando G tem cintura $\geq \hat{g}$?

$$5 \leq \hat{g} \leq 9.$$

- (Conjectura Blidia, Maffray e Zemir, 2009) Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e não é o grafo de Petersen, então $b(G) = d + 1$.

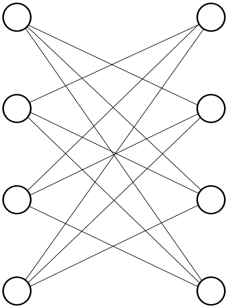
Grafos com cintura alta - o que não sabemos

- Existe c t.q. calcular $\Gamma(G)$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Existe c t.q. decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial quando G tem cintura $\geq c$?
- Qual o menor valor g^* tal que $b(G) \geq m(G) - 1$ quando G tem cintura $\geq g^*$?
$$5 \leq g^* \leq 7.$$
- Qual o menor valor $\hat{g}$ tal que $\partial\Gamma(G) \geq p(G)$ quando G tem cintura $\geq \hat{g}$?
$$5 \leq \hat{g} \leq 9.$$
- (Conjectura Blidia, Maffray e Zemir, 2009) Se G é d-regular com cintura ≥ 5 e não é o grafo de Petersen, então $b(G) = d + 1$.

Outras superclasses de árvores

Grafos bipartidos

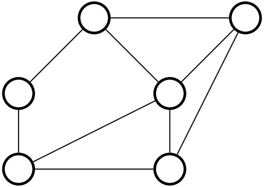
1. G é *bipartido* se $\chi(G) = 2$;
2. G é *cordal* se não possui ciclos induzidos de tamanho maior ou igual a 4.



Outras superclasses de árvores

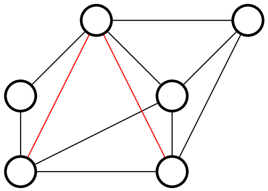
Grafos cordais

1. G é *bipartido* se $\chi(G) = 2$;
2. G é *cordal* se não possui ciclos induzidos de tamanho maior ou igual a 4.



Grafos cordais

1. G é *bipartido* se $\chi(G) = 2$;
2. G é *cordal* se não possui ciclos induzidos de tamanho maior ou igual a 4.



Complexidade

	$b(G) \geq k$	$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$	$\partial\Gamma(G) \geq k$	$\Gamma(G) \geq k$
bipartido	NP-c $k = \Delta(G) + 1$	NP-c $3 \in \mathcal{F}(G)$	NP-c	NP-c
cordais	NP-c	?	NP-c	NP-c

J. Kratochvíl, Zs. Tuza e M. Voigt.
On the b-chromatic number of graphs.
WG'02 - Lecture Notes Comp. Science 2573, 310–320.

Complexidade

	$b(G) \geq k$	$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$	$\partial\Gamma(G) \geq k$	$\Gamma(G) \geq k$
bipartido	NP-c $k = \Delta(G) + 1$	NP-c $3 \in \mathcal{F}(G)$	NP-c	NP-c
cordais	NP-c	?	NP-c	NP-c

F. Havet, C. Linhares Sales e L. Sampaio
b-coloring of tight graphs
Discrete Appl. Math. 160 (18) (2012) 2709–2715.

Complexidade

	$b(G) \geq k$	$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$	$\partial\Gamma(G) \geq k$	$\Gamma(G) \geq k$
bipartido	NP-c $k = \Delta(G) + 1$	NP-c $3 \in \mathcal{F}(G)$	NP-c	NP-c
cordais	NP-c	?	NP-c	NP-c

R. Laskar e J. Lyle.
Fall colouring of bipartite graphs and cartesian products of graphs.
Discrete Appl. Math. 157 (2009) 330–338.

	$b(G) \geq k$	$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$	$\partial\Gamma(G) \geq k$	$\Gamma(G) \geq k$
bipartido	NP-c $k = \Delta(G) + 1$	NP-c $3 \in \mathcal{F}(G)$	NP-c	NP-c
cordais	NP-c	?	NP-c	NP-c

Z. Shi, W. Goddard, S. T. Hedetniemi, K. Kennedy, R. Laskar e A. McRae.
An algorithm for partial Grundy number on trees.
Discrete Math. 304 (2005) 108–116.

Complexidade

	$b(G) \geq k$	$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$	$\partial\Gamma(G) \geq k$	$\Gamma(G) \geq k$
bipartido	NP-c $k = \Delta(G) + 1$	NP-c $3 \in \mathcal{F}(G)$	NP-c	NP-c
cordais	NP-c	?	NP-c	NP-c

A. McRae.
Generalizing NP*-completeness proofs for Bipartite and Chordal Graphs.*
Tese PhD, Clemson University, 1994.

Complexidade

	$b(G) \geq k$	$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$	$\partial\Gamma(G) \geq k$	$\Gamma(G) \geq k$
bipartido	NP-c $k = \Delta(G) + 1$	NP-c $\mathcal{F}(G) \setminus \{1, 2\} \neq \emptyset$	NP-c	NP-c
cordais	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c

A. **Silva**.
Graphs with small fall-spectrum.
Discrete Appl. Math. In press.

Casos polinomiais de subclasses de cordais

Teorema (Telle e Proskurowski, 1997)

Se G é uma k-árvore parcial, então é possível computar $\Gamma(G)$ em tempo $O(n^{3k^2})$.

(Grafos cordais são $\omega(G)$-árvores.)

J.A. Telle e A. Proskurowski.
Algorithms for vertex partitioning problems on partial k-trees.
SIAM J. Discr. Math 10 (4) (1997) 529–550.

Teorema (Telle e Proskurowski, 1997)

Se G é uma k-árvore parcial, então é possível computar $\Gamma(G)$ em tempo $O(n^{3k^2})$.

(Grafos cordais são $\omega(G)$-árvores.)

Teorema (Lyle et al. 2005; Kaul e Mitilos, 2018)

Se G é fortemente cordal, ou threshold, então

$$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset \text{ sse } \chi(G) = \delta(G) + 1.$$

J. Lyle and N. Drake and R. Laskar.
Fall Coloring of Strongly Chordal Graphs.
Congressus Numerantium 172 (2005) 149–159.

Teorema (Telle e Proskurowski, 1997)

Se G é uma k-árvore parcial, então é possível computar $\Gamma(G)$ em tempo $O(n^{3k^2})$.

(Grafos cordais são $\omega(G)$-árvores.)

Teorema (Lyle et al. 2005; Kaul e Mitilos, 2018)

Se G é fortemente cordal, ou threshold, então

$$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset \text{ sse } \chi(G) = \delta(G) + 1.$$

H. Kaul and C. Mitillos
On Graph Fall-Coloring: Existence and Constructions.
Manuscrito.

Teorema (Telle e Proskurowski, 1997)

Se G é uma k-árvore parcial, então é possível computar $\Gamma(G)$ em tempo $O(n^{3k^2})$.

(Grafos cordais são $\omega(G)$-árvores.)

Teorema (Lyle et al. 2005; Kaul e Mitilos, 2018)

Se G é fortemente cordal, ou threshold, então

$$\mathcal{F}(G) \neq \emptyset \text{ sse } \chi(G) = \delta(G) + 1.$$

Teorema (Campos e S., 2018)

Se G é um grafo bloco sem garras, então é polinomial decidir $b(G) \geq k$.

Campos e **Silva**.
b-edge-coloring trees.
Algorithmica 80 (2018) 104–115.

Grafos bipartidos com cintura alta

$\mathcal{B} :=$ G com $m(G)$ vertices de grau $m(G) - 1$, bipartido e com cintura ≥ 6.

Figura : Exemplo com $m = 4$.

Grafos bipartidos com cintura alta

$\mathcal{B} :=$ G com $m(G)$ vertices de grau $m(G) - 1$, bipartido e com cintura ≥ 6.

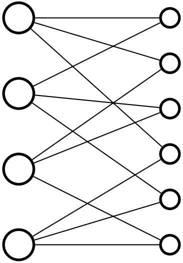


Figura : Exemplo com $m = 4$.

Conjectura (Havet, Linhares and Sampaio, 2010)

Se $G \in \mathcal{B}$*, então* $b(G) \geq m(G) - 1$*.*

F. Havet, C. Linhares, and L. Sampaio.
b-coloring of tight graphs.
Discrete Appl. Math. 160 (2012) 2709–2715.

Conjectura (Havet, Linhares and Sampaio, 2010)

Se $G \in \mathcal{B}$, *então* $b(G) \geq m(G) - 1$.

Teorema (Lin e Chang, 2013)

Erdős-Faber-Lovász implica Havet-Linhares-Sampaio.

W-H. Lin e G.J. Chang.
b-coloring of tight bipartite graphs and the Erdő-Faber-Lovász Conjecture.
Discrete App. Math. 161 (2013) 1060–1066.

Conjectura (Havet, Linhares and Sampaio, 2010)

Se $G \in \mathcal{B}$, então $b(G) \geq m(G) - 1$.

Teorema (Lin e Chang, 2013)

Erdős-Faber-Lovász implica Havet-Linhares-Sampaio.

Se $g^* \leq 6$, então HLS10 vale.

W-H. Lin e G.J. Chang.
b-coloring of tight bipartite graphs and the Erdő-Faber-Lovász Conjecture.
Discrete App. Math. 161 (2013) 1060–1066.

Bipartidos com diâmetro baixo

Pergunta

Qual a complexidade de decidir se G bipartido possui uma b-coloração com 3 cores?

J. Kratochvíl, Zs. Tuza e M. Voigt.
On the b-chromatic number of graphs.
WG'02 - Lecture Notes Comp. Science 2573, 310–320.

Bipartidos com diâmetro baixo

Pergunta

Qual a complexidade de decidir se G bipartido possui uma b-coloração com 3 cores?

Teorema (Faik, 2005)

Se G é bipartido com diâmetro ≥ 4, então G tem b-coloração com 3 cores. Se é 2, então não tem. E se é 3, então toda b-coloração de G com 3 cores é também fall-coloração.

T. Faik.
La b-continuité des b-colorations: complexité, proprietés structurelles et algorithmes.
Tese PhD. Université de Paris-Sud, 2005.

Bipartidos com diâmetro baixo

Pergunta

Qual a complexidade de decidir se G bipartido possui uma b-coloração com 3 cores?

Teorema (Faik, 2005)

Se G é bipartido com diâmetro ≥ 4, então G tem b-coloração com 3 cores. Se é 2, então não tem. E se é 3, então toda b-coloração de G com 3 cores é também fall-coloração.

Teorema (Laskar e Lyle, 2009)

Decidir $3 \in \mathcal{F}(G)$ é NP-completo se G é bipartido com diâmetro ≥ 6.

R. Laskar e J. Lyle.
Fall colouring of bipartite graphs and cartesian products of graphs.
Discrete Appl. Math. 157 (2009) 330–338.

Bipartidos com diâmetro baixo

Pergunta

Qual a complexidade de decidir se G bipartido possui uma b-coloração com 3 cores?

Teorema (Faik, 2005)

Se G é bipartido com diâmetro ≥ 4, então G tem b-coloração com 3 cores. Se é 2, então não tem. E se é 3, então toda b-coloração de G com 3 cores é também fall-coloração.

Teorema (Laskar e Lyle, 2009)

Decidir $3 \in \mathcal{F}(G)$ é NP-completo se G é bipartido com diâmetro ≥ 6.

Pergunta

Qual a complexidade de 3-coloração por listas para grafos com diâmetro ≤ 3? E se G for bipartido cordal?

D. Paulusma.
Open problems on graph coloring for special graph classes.
WG'15 - Lecture Notes Comp. Science 9224, 16–30.

Bipartidos e cordais - o que não sabemos

1. Calcular $b(G)$, $\Gamma(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ em fortemente cordais, e threshold é polinomial?
2. Calcular $b(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ e decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial em k-árvores parciais?
3. Quais dos parâmetros são fáceis em bipartidos com cintura alta? Em particular, $b(G) \geq m(G) - 1$ se $G \in \mathcal{B}$?
4. Qual a complexidade de decidir se G tem b-coloração com 3 cores, se G é bipartido com diâmetro ≥ 3?
5. Qual o menor valor d^* para o qual decidir $3 \in \mathcal{F}(G)$ é polinomial em G bipartido com diâmetro $\leq d^*$?

$$2 \leq d^* \leq 5.$$

Bipartidos e cordais - o que não sabemos

1. Calcular $b(G)$, $\Gamma(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ em fortemente cordais, e threshold é polinomial?
2. Calcular $b(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ e decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial em k-árvores parciais?
3. Quais dos parâmetros são fáceis em bipartidos com cintura alta? Em particular, $b(G) \geq m(G) - 1$ se $G \in \mathcal{B}$?
4. Qual a complexidade de decidir se G tem b-coloração com 3 cores, se G é bipartido com diâmetro ≥ 3?
5. Qual o menor valor d^* para o qual decidir $3 \in \mathcal{F}(G)$ é polinomial em G bipartido com diâmetro $\leq d^*$?

$$2 \leq d^* \leq 5.$$

Bipartidos e cordais - o que não sabemos

1. Calcular $b(G)$, $\Gamma(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ em fortemente cordais, e threshold é polinomial?
2. Calcular $b(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ e decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial em k-árvores parciais?
3. Quais dos parâmetros são fáceis em bipartidos com cintura alta? Em particular, $b(G) \geq m(G) - 1$ se $G \in \mathcal{B}$?
4. Qual a complexidade de decidir se G tem b-coloração com 3 cores, se G é bipartido com diâmetro ≥ 3?
5. Qual o menor valor d^* para o qual decidir $3 \in \mathcal{F}(G)$ é polinomial em G bipartido com diâmetro $\leq d^*$?

$$2 \leq d^* \leq 5.$$

Bipartidos e cordais - o que não sabemos

1. Calcular $b(G)$, $\Gamma(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ em fortemente cordais, e threshold é polinomial?
2. Calcular $b(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ e decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial em k-árvores parciais?
3. Quais dos parâmetros são fáceis em bipartidos com cintura alta? Em particular, $b(G) \geq m(G) - 1$ se $G \in \mathcal{B}$?
4. Qual a complexidade de decidir se G tem b-coloração com 3 cores, se G é bipartido com diâmetro ≥ 3?
5. Qual o menor valor d^* para o qual decidir $3 \in \mathcal{F}(G)$ é polinomial em G bipartido com diâmetro $\leq d^*$?

$$2 \leq d^* \leq 5.$$

Bipartidos e cordais - o que não sabemos

1. Calcular $b(G)$, $\Gamma(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ em fortemente cordais, e threshold é polinomial?
2. Calcular $b(G)$ e $\partial\Gamma(G)$ e decidir $\mathcal{F}(G) \neq \emptyset$ é polinomial em k-árvores parciais?
3. Quais dos parâmetros são fáceis em bipartidos com cintura alta? Em particular, $b(G) \geq m(G) - 1$ se $G \in \mathcal{B}$?
4. Qual a complexidade de decidir se G tem b-coloração com 3 cores, se G é bipartido com diâmetro ≥ 3?
5. Qual o menor valor d^* para o qual decidir $3 \in \mathcal{F}(G)$ é polinomial em G bipartido com diâmetro $\leq d^*$?

$$2 \leq d^* \leq 5.$$

Versão em arestas

Coloração de arestas

- Coloração de arestas: $f : E(G) \to \mathbb{N}$ t.q. $f(e) \neq f(e')$ sempre que $e \cap e' \neq \emptyset$ (diz-se que são *vizinhas*);
- Aresta gulosa: $e \in E(G)$ vizinha de uma aresta de cor i para toda cor $i < f(e)$;
- b-aresta: $e \in E(G)$ vizinha de uma aresta de cor i para toda cor $i \neq f(e)$.

Coloração de arestas

- Coloração de arestas: $f : E(G) \to \mathbb{N}$ t.q. $f(e) \neq f(e')$ sempre que $e \cap e' \neq \emptyset$ (diz-se que são *vizinhas*);
- Aresta gulosa: $e \in E(G)$ vizinha de uma aresta de cor i para toda cor $i < f(e)$;
- b-aresta: $e \in E(G)$ vizinha de uma aresta de cor i para toda cor $i \neq f(e)$.

Coloração de arestas

- Coloração de arestas: $f : E(G) \to \mathbb{N}$ t.q. $f(e) \neq f(e')$ sempre que $e \cap e' \neq \emptyset$ (diz-se que são *vizinhas*);
- Aresta gulosa: $e \in E(G)$ vizinha de uma aresta de cor i para toda cor $i < f(e)$;
- b-aresta: $e \in E(G)$ vizinha de uma aresta de cor i para toda cor $i \neq f(e)$.

Coloração de arestas

- *Coloração de arestas gulosa*: Toda aresta é gulosa;

$$\Gamma'(G)\text{: índice de Grundy.}$$

- *Coloração de arestas gulosa parcial*: Existe aresta gulosa em toda classe de cor;

$$\partial\Gamma'(G)\text{: índice parcial de Grundy.}$$

- *Fall-coloração de arestas*: Toda aresta é b-aresta;

$$\mathcal{F}'(G)\text{: fall-espectro de arestas.}$$

- *b-coloração de arestas*: Existe b-aresta em toda classe de cor.

$$b'(G)\text{: b-índice.}$$

Coloração de arestas

- *Coloração de arestas gulosa*: Toda aresta é gulosa;

  $\Gamma'(G)$: índice de Grundy.

- *Coloração de arestas gulosa parcial*: Existe aresta gulosa em toda classe de cor;

  $\partial\Gamma'(G)$: índice parcial de Grundy.

- *Fall-coloração de arestas*: Toda aresta é b-aresta;

  $\mathcal{F}'(G)$: fall-espectro de arestas.

- *b-coloração de arestas*: Existe b-aresta em toda classe de cor.

  $b'(G)$: b-índice.

- *Coloração de arestas gulosa*: Toda aresta é gulosa;

$$\Gamma'(G)\text{: índice de Grundy.}$$

- *Coloração de arestas gulosa parcial*: Existe aresta gulosa em toda classe de cor;

$$\partial\Gamma'(G)\text{: índice parcial de Grundy.}$$

- *Fall-coloração de arestas*: Toda aresta é b-aresta;

$$\mathcal{F}'(G)\text{: fall-espectro de arestas.}$$

- *b-coloração de arestas*: Existe b-aresta em toda classe de cor.

$$b'(G)\text{: b-índice.}$$

Coloração de arestas

- *Coloração de arestas gulosa*: Toda aresta é gulosa;

  $\Gamma'(G)$: índice de Grundy.

- *Coloração de arestas gulosa parcial*: Existe aresta gulosa em toda classe de cor;

  $\partial\Gamma'(G)$: índice parcial de Grundy.

- *Fall-coloração de arestas*: Toda aresta é b-aresta;

  $\mathcal{F}'(G)$: fall-espectro de arestas.

- *b-coloração de arestas*: Existe b-aresta em toda classe de cor.

  $b'(G)$: b-índice.

Complexidade

Teorema (Campos et. al., 2015)

Calcular $b'(G)$ é NP-difícil mesmo que G seja um grafo comparabilidade, ou livre de C_k, $k \geq 3$.

Campos, Lima, Martins, Sampaio, Santos and **Silva**.
The b-chromatic index of graphs.
Discrete Math. 338 (11) (2015) 2072–2079.

Teorema (Campos et. al., 2015)

Calcular $b'(G)$ é NP-difícil mesmo que G seja um grafo comparabilidade, ou livre de C_k, $k \geq 3$.

Teorema (Havet, Maia e Yu, 2015)

Calcular $\Gamma'(G)$ é NP-difícil.

F. Havet, K. Maia e M.L. Yu.
Complexity of greedy edge-colouring.
J. of the Brazilian Comp. Soc. (2015) 21–18.

Casos positivos

Teorema (Campos e S., 2018)

Se G é uma árvore, então calcular $b'(G)$ pode ser feito em tempo polinomial.

Campos e **Silva**.
b-edge-coloring trees.
Algorithmica 80 (2018) 104–115.

Casos positivos

Teorema (Campos e S., 2018)

Se G é uma árvore, então calcular $b'(G)$ pode ser feito em tempo polinomial.

Teorema (Havet, Maia e Yu, 2015)

Se G é um carterpillar, então calcular $\Gamma'(G)$ pode ser feito em tempo polinomial.

F. Havet, K. Maia e M.L. Yu.
Complexity of greedy edge-colouring.
J. of the Brazilian Comp. Soc. (2015) 21–18.

Casos positivos

Teorema (Campos e S., 2018)

Se G é uma árvore, então calcular $b'(G)$ pode ser feito em tempo polinomial.

Teorema (Havet, Maia e Yu, 2015)

Se G é um carterpillar, então calcular $\Gamma'(G)$ pode ser feito em tempo polinomial.

Teorema (Jakovac e Peterin, 2015)

Se G é um grafo d-regular, então $b'(G) = 2d - 1$.

M. Jakovac e I. Peterin.
The b-chromatic index of a graph.
Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 38 (2015) 1375–1392.

Coloração de arestas - problemas abertos

- Complexidade de decidir $\mathcal{F}'(G) \neq \emptyset$;
- Complexidade de decidir $\partial\Gamma'(G) \geq k$;
- Complexidade de decidir $\mathcal{F}'(G) \neq \emptyset$, $\Gamma'(G) \geq k$ e $\partial\Gamma'(G) \geq k$ quando G é uma árvore.

Coloração de arestas - problemas abertos

- Complexidade de decidir $\mathcal{F}'(G) \neq \emptyset$;
- Complexidade de decidir $\partial\Gamma'(G) \geq k$;
- Complexidade de decidir $\mathcal{F}'(G) \neq \emptyset$, $\Gamma'(G) \geq k$ e $\partial\Gamma'(G) \geq k$ quando G é uma árvore.

Coloração de arestas - problemas abertos

- Complexidade de decidir $\mathcal{F}'(G) \neq \emptyset$;
- Complexidade de decidir $\partial\Gamma'(G) \geq k$;
- Complexidade de decidir $\mathcal{F}'(G) \neq \emptyset$, $\Gamma'(G) \geq k$ e $\partial\Gamma'(G) \geq k$ quando G é uma árvore.

Continuidade das colorações

Continuidade das colorações

Sendo $a(G) \geq \chi(G)$, não é evidente que existem colorações do "tipo a" com k cores, para todo $k \in \{\chi(G), \ldots, a(G)\}$.

Continuidade das colorações

Sendo $a(G) \geq \chi(G)$, não é evidente que existem colorações do "tipo a" com k cores, para todo $k \in \{\chi(G), \ldots, a(G)\}$.

Teorema (Selkow e Christen, 79)

Existe uma coloração gulosa com k cores, para todo $k \in \{\chi(G), \ldots, \Gamma(G)\}$.

C.A. Christen e S.M. Selkow.
Some perfect coloring properties of graphs.
J. Comb. Theory B 27 (1979) 49–59.

Continuidade das colorações

Sendo $a(G) \geq \chi(G)$, não é evidente que existem colorações do "tipo a" com k cores, para todo $k \in \{\chi(G), \ldots, a(G)\}$.

Teorema (Selkow e Christen, 79)

Existe uma coloração gulosa com k cores, para todo $k \in \{\chi(G), \ldots, \Gamma(G)\}$.

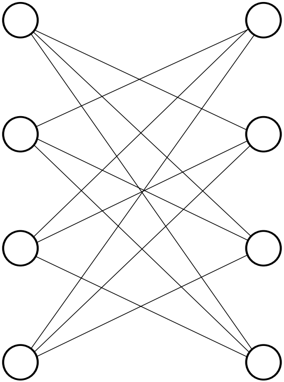
Teorema (Balakrishnan e Kavaskar, 2013)

Existe uma coloração gulosa parcial com k cores, para todo $k \in \{\chi(G), \ldots, \partial\Gamma(G)\}$.

R. Balakrishnan e T. Kavaskar.
Interpolation theorem for partial Grundy coloring.
Discr. Math. 313 (2013) 949–950.

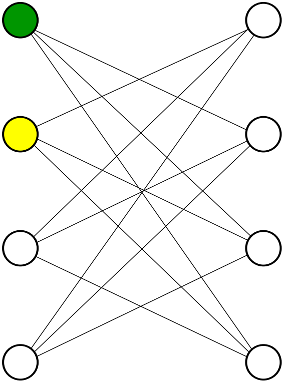
Não vale para b-colorações

G possui b-coloração com 2 e 4 cores, mas não com 3 cores.



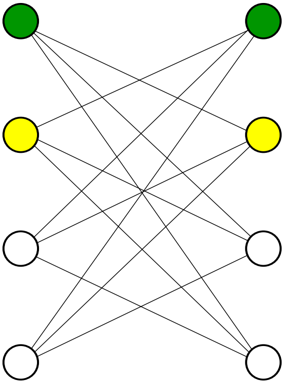
Não vale para b-colorações

G possui b-coloração com 2 e 4 cores, mas não com 3 cores.



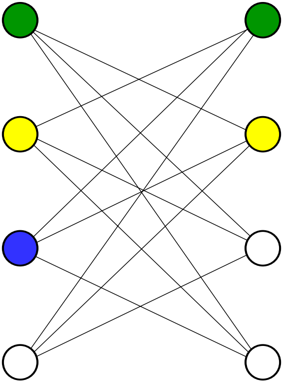
Não vale para b-colorações

G possui b-coloração com 2 e 4 cores, mas não com 3 cores.



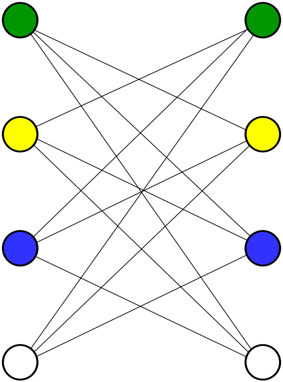
Não vale para b-colorações

G possui b-coloração com 2 e 4 cores, mas não com 3 cores.



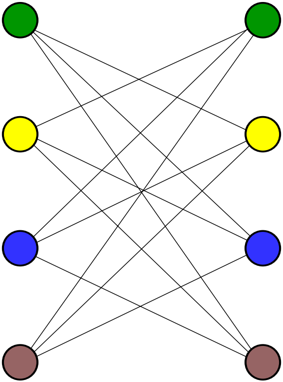
Não vale para b-colorações

G possui b-coloração com 2 e 4 cores, mas não com 3 cores.



Não vale para b-colorações

G possui b-coloração com 2 e 4 cores, mas não com 3 cores.



b-continuidade

Definição: b-espectro

- $S_b(G)$: todo k t.q. G admite b-coloração com k cores;
- Se $S_b(G) = \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$, diz-se que G é b-contínuo.

Definição: b-contínuo

- $S_b(G)$: todo k t.q. G admite b-coloração com k cores;

- Se $S_b(G) = \{\chi(G), \cdots, b(G)\}$, diz-se que G é b-contínuo.

Teorema (Barth, Cohen e Faik, 2007)

Para todo $S \subseteq \mathbb{N} - \{1\}$, *existe* G *t.q.* $S_b(G) = S$.

D. Barth, J. Cohen and T. Faik.
On the b-continuity property of graphs.
Discrete Appl. Math. 155 (2007) 1761–1768.

Existência e complexidade

Teorema (Barth, Cohen e Faik, 2007)
Para todo $S \subseteq \mathbb{N} - \{1\}$, *existe* G *t.q.* $S_b(G) = S$.

Teorema (Barth, Cohen e Faik, 2007)
Decidir se G *é b-contínuo é* NP-*completo, mesmo se fornecidas colorações com* $\chi(G)$ *e* $b(G)$ *cores.*

D. Barth, J. Cohen and T. Faik.
On the b-continuity property of graphs.
Discrete Appl. Math. 155 (2007) 1761–1768.

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n,2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos .

T. Faik.
About the b-continuity of graphs.
CTW 2004. Electron. Notes in Discrete Math. 17 (2004) 151–156.

Casos positivos

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos .

Kara, Kratochvil and Voigt.
b-Continuity.
Preprint no. M14/04, Technical University Ilmenau, 2004.

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos .

R. Javadi and B. Omoomi.
On b-coloring of the Kneser graphs.
Discrete Math. 309 (2009) 4399–4408.

Casos positivos

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos .

F. Bonomo, G. Duran, F. Maffray, J. Marenco and M. Valencia-Pabon.
On the b-coloring of cographs and P4-sparse graphs.
Graphs and Combin. 25 (2) (2009) 153–167.

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos .

C.I. Betancur Velasquez, F. Bonomo, and I. Koch.
On the b-coloring of P4-tidy graphs.
Discrete Appl. Math. 159 (2011) 67–76.

Casos positivos

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos .

R. Balakrishnan and T. Kavaskar.
b-coloring of Kneser graphs.
Discrete Appl. Math. 160 (2012) 9–14.

Casos positivos

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos 10 .

C. Linhares Sales and A. **Silva**.
The b-continuity of graphs with large girth.
Graphs and Combinatorics 33 (5) (2017) 1139–1146.

Casos positivos

Algumas classes b-contínuas

- Cordais;
- Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 17$;
- P_4-esparsos;
- P_4-tidy;
- Grafos regulares com cintura ao menos 6 sem ciclos de tamanho 7;
- Grafos com cintura ao menos 8.

A. Ibiapina and A. **Silva**.
Graphs with girth at least 8 are b-continuous.
Submetido em congresso.

b-continuidade - perguntas em aberto

- Quais os menores valores $\hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  2. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$

- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo;

- Grafos linha são b-contínuos?

b-continuidade - perguntas em aberto

- Quais os menores valores $\hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  2. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo;
- Grafos linha são b-contínuos?

b-continuidade - perguntas em aberto

- Quais os menores valores $\hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  2. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$

- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo;

- Grafos linha são b-contínuos?

b-continuidade - perguntas em aberto

- Quais os menores valores $\hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  2. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$
- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo;
- Grafos linha são b-contínuos?

b-continuidade - perguntas em aberto

- Quais os menores valores $\hat{g}, g^b$ para os quais:
  1. G é b-contínuo se cintura $\geq \hat{g}$; $(5 \leq \hat{g} \leq 8)$
  2. G bipartido é b-contínuo se cintura $\geq g^b$; $(g^b \in \{6, 8\})$

- [Alkhateeb] Todo grafo livre de garra é b-contínuo;

- Grafos linha são b-contínuos?

Síntese e outros aspectos

Síntese

- Complexidade sobre grafos com cintura alta;
- Complexidade sobre bipartidos, cordais e subclasses, incluido k-árvores;
- Complexidade da versão de arestas;
- b-continuidade.

Síntese

- Complexidade sobre grafos com cintura alta;
- Complexidade sobre bipartidos, cordais e subclasses, incluido k-árvores;
- Complexidade da versão de arestas;
- b-continuidade.

Síntese

- Complexidade sobre grafos com cintura alta;
- Complexidade sobre bipartidos, cordais e subclasses, incluido k-árvores;
- Complexidade da versão de arestas;
- b-continuidade.

Síntese

- Complexidade sobre grafos com cintura alta;
- Complexidade sobre bipartidos, cordais e subclasses, incluido k-árvores;
- Complexidade da versão de arestas;
- b-continuidade.

Outros aspectos

- Estudo de outras classes importantes, como grafos planares e grafos perfeitos;
- Aspectos de perfeição sobre os parâmetros de fall-coloração e coloração gulosa parcial;
- Produtos de grafos: cálculo dos parâmetros e preservação de b-continuidade;
- Desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum;
- Algoritmos de parâmetro fixo (FPT);
- Outras variações: acolorações, colorações de Grundy conexa, jogos de coloração, colorações Nash, etc.

Outros aspectos

- Estudo de outras classes importantes, como grafos planares e grafos perfeitos;
- Aspectos de perfeição sobre os parâmetros de fall-coloração e coloração gulosa parcial;
- Produtos de grafos: cálculo dos parâmetros e preservação de b-continuidade;
- Desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum;
- Algoritmos de parâmetro fixo (FPT);
- Outras variações: acolorações, colorações de Grundy conexa, jogos de coloração, colorações Nash, etc.

Outros aspectos

- Estudo de outras classes importantes, como grafos planares e grafos perfeitos;
- Aspectos de perfeição sobre os parâmetros de fall-coloração e coloração gulosa parcial;
- Produtos de grafos: cálculo dos parâmetros e preservação de b-continuidade;
- Desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum;
- Algoritmos de parâmetro fixo (FPT);
- Outras variações: acolorações, colorações de Grundy conexa, jogos de coloração, colorações Nash, etc.

Outros aspectos

- Estudo de outras classes importantes, como grafos planares e grafos perfeitos;
- Aspectos de perfeição sobre os parâmetros de fall-coloração e coloração gulosa parcial;
- Produtos de grafos: cálculo dos parâmetros e preservação de b-continuidade;
- Desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum;
- Algoritmos de parâmetro fixo (FPT);
- Outras variações: acolorações, colorações de Grundy conexa, jogos de coloração, colorações Nash, etc.

Outros aspectos

- Estudo de outras classes importantes, como grafos planares e grafos perfeitos;
- Aspectos de perfeição sobre os parâmetros de fall-coloração e coloração gulosa parcial;
- Produtos de grafos: cálculo dos parâmetros e preservação de b-continuidade;
- Desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum;
- Algoritmos de parâmetro fixo (FPT);
- Outras variações: acolorações, colorações de Grundy conexa, jogos de coloração, colorações Nash, etc.

Outros aspectos

- Estudo de outras classes importantes, como grafos planares e grafos perfeitos;
- Aspectos de perfeição sobre os parâmetros de fall-coloração e coloração gulosa parcial;
- Produtos de grafos: cálculo dos parâmetros e preservação de b-continuidade;
- Desigualdades do tipo Nordhaus-Gaddum;
- Algoritmos de parâmetro fixo (FPT);
- Outras variações: acolorações, colorações de Grundy conexa, jogos de coloração, colorações Nash, etc.

Obrigada!