UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista 3 - Variáveis Complexas

1. Encontre a Transformação de Möbius T tal que $T(2) = 1$, $T(i) = i$ e $T(-2) = -1$.

2. Sejam $S(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ e $T(z) = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ Tranformações de Möbius. Mostre que $S = T$ se e somente se existe $\lambda \neq 0$ complexo tal que $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, $c_2 = \lambda c_1$, $d_2 = \lambda d_1$.

3. Seja $T(z) = \dfrac{a - z}{1 - \bar{a} z}$ uma Transformação de Möbius, com $a \in \mathbb{C}$.
   (a) Quais os valores que a não pode tomar?
   (b) Mostre que T preserva a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ e que, para $|a| < 1$, $T(D) = D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$.

4. Seja $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ uma Transformação de Möbius diferente da identidade, mostre que $T \circ T(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, se e somente se $a + d = 0$.

5. Encontre os pontos fixos das seguintes Tranformações de Möbius:
   (a) $Sz = \dfrac{z - 1}{z + 1}$
   (b) $Tz = \dfrac{6z - 9}{z}$

6. Seja T uma transformação bilinear tal que $T(0) = 0$. Mostre que esta transformação pode ser escrita como $T(z) = \dfrac{z}{az + b}$.

7. Seja $T(z) = \dfrac{z+a}{z+b}$ uma transformação de Möbius. Qual a relação entre a e b que garante que T tenha um único ponto fixo?

8. Seja T uma transformação de Möbius que cujos pontos fixos são z_1 e z_2. Se S é uma transformação de Möbius, mostre que $S^{-1}z_1$ e $S^{-1}z_2$ são os pontos fixos de $S^{-1}TS$.

   Definição: Se $f(z) = z + a$, f é chamada translação. Se $f(z) = az$, f é chamada dilatação. Se $f(z) = e^{i\theta}z$, f é chamada rotação. Se $f(z) = \dfrac{1}{z}$, f é chamada inversão.

9. Mostre que toda transformação de Möbius pode ser obtida a partir de composições de translações, dilatações, rotações ou inversões.