UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Lista 4 - Variáveis Complexas**

1. Seja $C$ o quadrado cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y \pm 2$, no sentido positivo. Calcule o valor de cada integral a seguir:

   (a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}dz}{z - \frac{\pi i}{2}}$; (b) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$; (c) $\displaystyle\int_C \frac{z}{2z+1}dz$.

2. Seja $C$ a circunferência $|z| = 3$ no sentido positivo. Calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$; (b) $\displaystyle\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-1}dz$.

3. Sejam $C$ a circunferência $|z| = 3$ no sentido positivo e $g(z_0) = \displaystyle\int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0}dz$.

   (a) Mostre que $g(2) = 8\pi i$.

   (b) Qual o valor de $g(z_0)$ quando $|z_0| > 3$?

4. Sejam $C$ o contorno fechado orientado no sentido positivo e $g(z_0) = \displaystyle\int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3}dz$. Mostre que:

   (a) Quando $z_0$ está dentro de $C$, $g(z_0) = 6\pi i z_0$;

   (b) Quando $z_0$ está fora de $C$, $g(z_0) = 0$.

5. Sejam $R$ um fechado cuja fronteira é o caminhos fechado $C$ e $a \in int(R)$. Mostre que $\displaystyle\int_C (z-a)^{-n} = 0$, onde $n \geq 2$.

6. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$, onde $\gamma(\theta) = 1 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $n \in \mathbb{N}$.

7. Seja $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 2\}$ no sentido positivo. Calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+4}dz$; (b) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2}dz$.

8. Sejam $f$ analítica dentro e sobre o contorno fechado orientado $C$ e $z_0$ não sobre $C$. Mostre que $\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0}dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$.

9. Sejam $C$ a circunferência unitária $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ e $k$ uma constante real. Mostre que:

   (a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i;$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{k\cos\theta} \cos(k \sin\theta) d\theta = \pi.$

10. Teorema do Módulo Mínimo: Seja $f$ analítica num domínio limitado $D$ e contínua no fecho $\overline{D}$ e assuma que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{D}$. Se $N$ é o valor mínimo de $|f(z)|$ em $\overline{D}$, então $|f(z)| > N$, $\forall z \in D$, a menos que $f$ seja constante. Dica: usar $\dfrac{1}{f}$.

11. Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (z+1)^2$, onde $D$ é o triângulo cujos vértices estão em $z = 0$, $z = 2$ e $z = i$. Encontre os pontos em $\overline{D}$ tais que $f$ assume seus valores máximo e mínimo.