Definição e propriedades.

1. Faça um esboço dos segintes conjuntos:

$$a)|z| = |z-2| \qquad b)\ |z| = |\bar{z}-1| = |z-1| \qquad c)\ a|z| = |z-1|, a \in \mathbb{R} - \{0,1\}$$
$$d)\ re(z) = im(z-1) \qquad e)\ im(z-1) = |z+1| \qquad f)\ |\bar{z}| = |z-1|$$

2. Para $z, w, v \in \mathbb{C}$, prove que
   (a) $|zw| = |z||w|$
   (b) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2re(\bar{z}w) + |w|^2$
   (c) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (use item (b))
   (d) $||z| - |w|| \leq |z-w|$ (use item (c))
   (e) $|z+w+v| \leq |z| + |w| + |v|$

3. Encontre a parte real, imaginária, valor absoluto e o conjugado:

$$a)\frac{1}{z} \qquad b)\ z^3 \qquad c)\ \frac{z-a}{z+a}, a \in \mathbb{R}$$
$$d)\ \frac{3+5i}{7i+1} \qquad e)\ (1+i)^6 \qquad f)\ i^17$$

Representação Polar

4. Dentre todos os números complexos z tais que $|z - 25i| \leq 15$ obtenha o de menor argumento.

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, ache em função de n as soluções da equação $(z-1)^n = z^n$.

6. Seja n um número natural múltiplo de 3. Calcule o valor de $(1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n$ (ponha $1 \pm i\sqrt{3}$ em forma polar).

7. Encontre expressões para $\operatorname{sen} 4\theta$ e $\cos 4\theta$ em função de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$.

8. Resolva as equações.

$$a)z^2 = 1 - i\sqrt{3} \qquad b)\ z^5 = -1 \qquad c)\ \bar{z}^3 = 1$$
$$d)\ z^7 = -(1+i) \qquad e)\ 2iz^2 - 5z + i - 2 = 0 \qquad f)\ \begin{cases} iz + 2w = i - 3 \\ (2-i)z + 3w = 2 - 2i \end{cases}$$

Topologia

9. Nesse exercício, z_0 é um número complexos arbitrário. Esboce os conjuntos abaixo, diga se são fechados, abertos (ou nenhum deles), esboce sua fronteira, diga quais são os domínios e quais são limitados:

$$a)\ re(z) \geq re(z_0) \qquad b)\ im(z_0) > re(z) \qquad c)\ im(zz_0) > 0$$
$$d)\ re(z^2) \geq 1 \qquad e)\ |z - z_0| \geq |z - \bar{z}_0| \qquad f)\ \begin{cases} 1 < |z - z_0| \leq 3 \\ arg(z_0) < arg(z) < arg(-z_0) \end{cases}$$

10. Mostre que o $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ não existe.

11. Sejam $D \subset \mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$ uma função. Considere as funções $u, v : D \to \mathbb{R}$ definidas por $u(z) = re[f(z)]$ e $v(z) = im[f(z)]$. Mostre que para todo z_0 ponto de acumulação de D:

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ se, e somente se $\lim_{z \to z_0} u(z) = re(w_0)$ e $\lim_{z \to z_0} v(z) = im(w_0)$.

Derivada

12. Derive.

$a)\ f(z) = 3z^2 - 2z + 4$ $\quad b)\ f(z) = (1 - 4z^2)^3$ $\quad c)\ f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$

$d)\ f(z)\dfrac{1}{(z-i)z(z^2+i)}$ $\quad e)\ f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ $\quad f)\ f(z) = |z|^2$ em $z = 0$

13. Mostre que $f'(z)$ não existe para todo z:

$a)\ f(z) = \bar{z}$ $\quad b)\ f(z) = re(z)$ $\quad c)\ f(z) = im(z)$

14. Seja

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y(y - ix)}{x^6 + y^2} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Mostre que $\dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} \to 0$ para $z \to 0$ ao longo de qualquer reta passando pela origem, mas que $\lim_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ existe.