Equações de Cauchy-Rienmann

1. Concurso IFCE 2016

   (a) Seja $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua com parte real e imaginária u e v de classe C^1 (i.e. u e v tem derivadas parciais contínua), onde $U \subset \mathbb{C}$ é uma aberto. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

      i. f é holomorfa em $z_0 \in U$, isto é, $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe.

      ii. As partes real e imaginária de $f = u + iv$ satisfazem às relações de Cauchy-Riemann, ou seja, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

   (b) Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, ou seja, f é holomorfa em todos os pontos de U. Mostre que se $f(U) \subset \mathbb{R}$, então f é constante.

   (c) (Teorema da função inversa.) Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Suponha que $f'(z_0) \neq 0$. Mostre que existe uma vizinhança aberta $V \subset U$ de z_0 tal que $f(V) = W$ é aberto e $f|_V : V \to W$ possui inversa holomorfa. Observação: O teorema da função inversa para o caso real e o fato que toda função holomorfa tem partes real e imaginária com derivadas parciais contínuas podem serem usados sem demonstração.

2. Use as equações de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z)$ não existe para todo z:

$$a)\ f(z) = \bar{z} \qquad b)\ f(z) = re(z) \qquad c)\ f(z) = im(z)$$

3. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$.

   (a) Verifique as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$.

   (b) Mostre que $f'(0)$ não existe. Veja questão 1) e diga qual hipótese f não satisfaz para ser holomorfa em 0. Sugestão: calcule o limite $f'(0)$ sobre o eixo real e sobre a reta $t(1, i), t \in \mathbb{R}$.

Funções usuais

4. Defina $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$. Prove que:

$$a)\ \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad b)\ \overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}) \qquad c)\ \sin(-z) = -\sin(z)$$

$$d)\ \cos(-z) = \cos(z) \qquad e)\ \frac{d}{dz}(\cos(z)) = -\sin(z) \qquad f)\ \frac{d}{dz}(\sin(z)) = \cos(z)$$

$g)$ $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$h)$ $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \cos z_2$

$i)$ $\cos, \sin$ são periódicas de período 2π

$j)$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \sin(z)$ e $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

5. Defina $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$. Prove que:

   $a)$ $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ $\quad b)$ $\cosh(iz) = \cos(z)$ $\quad c)$ $\sinh(iz) = i\sin(z)$

   $d)$ $\cosh(-z) = \cosh(z)$ $\quad e)$ $\dfrac{d}{dz}(\cosh(z)) = \sinh(z)$ $\quad f)$ $\dfrac{d}{dz}(\sinh(z)) = \cosh(z)$

   $g)$ $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

   $h)$ $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \cosh z_2$

   $i)$ $\cosh, \sinh$ são periódicas de período $2\pi i$

   $j) \cosh\left(z + \dfrac{\pi i}{2}\right) = i\sinh(z)$ e $\sinh\left(z + \dfrac{\pi i}{2}\right) = i\cosh z$

6. Resolva as equações.

   $a) \sin z = 0$ $\quad b)$ $\cos z = 0$ $\quad c)$ $\sinh z = 0$

   $d)$ $\cosh z = 0$ $\quad e)$ $\cosh z = i$ $\quad f)$ $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(i\bar{z})}$

7. Em quais pontos $\exp \bar{z}$ é derivável? E $\overline{\exp \bar{z}}$?

8. Defina $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$. Escreva na forma $u + iv$. Calcule a derivada. Determine os pontos z para os quais $\tanh z$ é rea.

9. Determine $im(\exp(i \sin z)$ e $re(\exp(iz^2))$.

10. Resolva a inequação $|\exp(-iz)| < 1$.

11. O chamado paradoxo de Bernoulli é o seguinte

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow \log(-z) = \log z.$$

    Onde está o erro?

12. Qual é a imagem do semi-plano superior $\{z : im(z) > 0\}$ pela aplicação $S(z) = \frac{i-z}{z+1}$?

13. Qual é a imagem do semi-plano superior $\{z : im(z) > 0\}$ pela aplicação $f(z) = \log\left(\frac{i-z}{z+1}\right)$?

14. Qual é a imagem do semi-plano superior $\{z : im(z) > a > 0\}$ pela aplicação $f(z) = \frac{1}{z}$?

15. Qual é a imagem do retângulo $\{z : -\pi/2 < re(z) < \pi/2, 0 < im(z) < a\}$ pela aplicação $f(z) = \operatorname{sen} z$?

16. Determine uma bijeção holomorfa entre o semi-plano $3x + 2y > 0$ e o disco $D(i, 15)$.

17. Determine uma bijeção holomorfa entre o semi-plano $3x + 2y > 0$ e exterior do disco $D(i, 15)$.

18. Determine condições necessãrias e suficientes sobre os números a, b, c e d para que a transformação de Möbius $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ seja uma bijeção holomorfa do semi-plano superior $\{z : im(z)\}$ sobre si mesmo.

19. Determine todas as transformações de Möbius S satisfazendo $S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

20. Determine todas as transformações de Möbius S satisfazendo $S(D) = D$, onde $D = \{z : |z| < 1\}$