Notas Sobre Sequências e Séries 2015

Alexandre Fernandes

Limite de seqüências

Definição. Uma seq. (s_n) *converge* para $a \in \mathbb{R}$, ou $a \in \mathbb{R}$ é *limite* de (s_n), se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - a| < \epsilon$ para todo $n > n_0$.

Notação. Utilizaremos as seguintes notações $s_n \to a$ para dizer que (s_n) converge para a e $\lim s_n = a$ para dizer que a é limite de (s_n).

Unicidade do Limite. Seja (s_n) uma seq. de números reais. Se (s_n) converge para a e para b, então $a = b$.

Exemplo. $\dfrac{2n+1}{3n-1} \to \dfrac{2}{3}$

Seja (a_n) a seq. considerada no exemplo acima. Como $n > \frac{5}{9\epsilon} + \frac{1}{3}$ implica $|a_n - \frac{2}{3}| < \epsilon$ valem:

$n > 1 \Rightarrow |a_n - \frac{2}{3}| < 1$

$n > 6 \Rightarrow |a_n - \frac{2}{3}| < 0,1$

$n > 56 \Rightarrow |a_n - \frac{2}{3}| < 0,01$

$n > 556 \Rightarrow |a_n - \frac{2}{3}| < 0,001$

$\ldots$

Obs. *Toda seq. convergente é limitada.*

Exemplo. Se $d > 1$, então a sequência $s_n = d^n$ é ilimitada, portanto não converge. Por outro lado, se $0 < c < 1$, então $c^n \to 0$.

A recíproca do resultado acima não é verdadeira. Isto é, se uma sequência é limitada, não podemos garantir que ela é uma sequência convergente. De fato, a seq. $a_n = sen(n\frac{\pi}{2})$ é limitada e não converge.

Uma seq. (s_n) é dita *monótona* não-decrescente (não-crescente) se $s_n \leq s_{n+1}$ $(s_n \geq s_{n+1})$ para todo n.

Teorema. *Toda seq. monótona limitada é convergente.*

Nesta exposição, o resultado acima será tratado como o *Axioma de Completeza dos Números Reais.*

Exemplo. Seja a um número real positivo. Então, $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Demonstração. Se $a = 1$, nada temos a mostrar. Então, podemos supor $a \neq 1$. Se $a < 1$, a seq. $s_n = \sqrt[n]{a}$ é não-decrescente e limitada superiormente por 1 , portanto $s_n \to c$. Como $0 < a \leq c^n$ para todo n, não pode ser $c < 1$, isto é, $c = 1$. Por outro lado, se $a > 1$, a seq. $s_n = \sqrt[n]{a}$ é não-crescente e limitada inferiormente por 1, portanto $s_n \to d$. Como $d^n \leq a$ para todo n, não pode ser $d > 1$, isto é, $d = 1$. □

Expansão decimal.

Sejam $K \in \mathbb{Z}$ e $d_1, \dots, d_n, \dots$ dígitos em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Consideremos a seq. definida por

$$s_n = K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_n}{10^n}.$$

Claramente (s_n) é uma seq não-decrescente e, além disso, $s_n < K + 1$ para todo n. Logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \to \alpha$. É comum denotar $\alpha = K, d_1 \dots d_n \dots$. Por exemplo, $1 = 0,9999\dots$ e $\frac{10}{3} = 3,33333\dots$.

Reciprocamente, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existem $K \in \mathbb{Z}$ e $d_1, \dots, d_n, \dots$ dígitos em $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tais que $\alpha = K, d_1 \dots d_n \dots$. Com efeito, existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que

$$K \leq \alpha < K + 1.$$

Agora, partindo o intervalo $[K, K + 1)$ em 10 subintervalos de mesmo comprimento, obtemos $d_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que

$$K + \frac{d_1}{10} \leq \alpha < K + \frac{d_1 + 1}{10}.$$

Repetindo o feito acima, partimos o intervalo $[K + \frac{d_1}{10}, K + \frac{d_1+1}{10})$ em 100 intervalos de mesmo comprimentos e obtemos $d_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que

$$K + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} \leq \alpha < K + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2 + 1}{100}.$$

Procedendo dessa maneira obtemos o desejado. Acredite!

O número e.

Consideremos a seq. (a_n) definida por:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

(a_n) é não-decrescente e, além disso,

$$2 \leq a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 3.$$

Portanto, existe $e \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \to e$.

Proposição. $e \notin \mathbb{Q}$.

Demonstração. Suponhamos que $e = \frac{p}{q}$ com p, q inteiros e $q > 0$. Então, seja $k > q$ um inteiro e defina $N = k!(e - a_k)$, em que $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Desta forma, recebemos que N é inteiro. Por outro lado, Como $a_n \to e$, existe $n > k \in \mathbb{N}$ tal que $k!(e - a_n) < \frac{1}{2}$. Portanto,

$$0 < N \leq k!(e - a_n) + k!(a_n - a_k) < \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)\cdots(n)}.$$

Assim, considerando $p = n - k$, obtemos:

$$0 < N < \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)\cdots(n)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^P} < \frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

O que contradiz o fato de N ser inteiro. $\square$

Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seq. de números reais. Seja $\mathbb{N}' = \{n_1, \ldots, n_k, \ldots\}$ subconjunto de $\mathbb{N}$ com $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{K+1} < \ldots$ Uma *subseqüência* de (s_n) com índices em $\mathbb{N}'$ é, por definição, uma seq $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $t_k = s_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo. Seja $s_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Então (s_{2k}) e (s_{2k-1}) são subseq. de (s_n) tais que $s_{2k} \to 1$ e $s_{2k-1} \to -1$.

Proposição. *Sejam (s_n) uma seq. de números reais e $a \in \mathbb{R}$. Então, $s_n \to a$ se, e somente se, toda subseq. de (s_n) converge para a.*

O seguinte exemplo, mostra como podemos aplicar o resultado acima.

Exemplo. Outra prova da convergência $\sqrt[n]{a} \to 1$ quando a for um número real positivo.

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{R}$ positivo e $s_n = \sqrt[n]{a}$. Se $a = 1$, nada temos a fazer. Caso $a > 1$, a seq. (s_n) é limitada inferiormente por 1 e não-crescente, portanto existe $s \in \mathbb{R}$ $(s \geq 1)$ tal que $s_n \to s$. Por outro lado, consideremos a subseq. dos índices pares de (s_n), isto é, seja $t_n = s_{2n}$. Agora, pelo teorema acima, $t_n \to s$. Por outro lado, a relação ${t_n}^2 = s_n$ oferece $s^2 = s$. Logo, $s = 1$ $\square$

Proposição. *Toda seq. de números reais possui uma subseq. monótona.*

Demonstração. Diremos que um natural n é *dominante* (com respeito à seq. dada) quando:

$$s_n \geq s_m \quad \text{para todo} \quad m > n.$$

Se tivermos infinitos naturais dominantes

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

então a subseq. s_{n_k} será monótona não-crescente. Por outro lado, se tivermos apenas uma quantidade finita de naturais dominantes Seja n_1 maior do que todos os dominantes. Em particular, n_1 não é dominante, isto é, existe $n_2 > n_1$ tal que $s_{n_2} > s_{n_1}$. Agora, n_2 não é dominante, portanto existe $n_3 > n_2$ tal que $s_{n_1} < s_{n_2} < s_{n_3}$. Prosseguindo com essa construção, obtemos uma subseq. crescente

$$s_{n_1} < s_{n_2} < s_{n_3} < \cdots < s_{n_k} < \cdots.$$

$\square$

Corolário (Bolzano-Weierstrass). *Toda seq. limitada de números reais possui uma subseq. convergente.*

Seja (s_n) uma seq. de números reais e $\mathcal{P}$ uma propriedade sobre os elementos da seq. (s_n). Dizemos que $\mathcal{P}$ vale para n suficientemente grande se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}$ vale para s_n sempre que $n \geq n_0$.

Questão. Seja (s_n) uma seq. de números reais convergindo para $\dfrac{1}{2}$. Podemos afimar que s_n não é inteiro para todo n suficientemente grande ?

Solução. A resposta da pergunta acima é afirmativa, pois: como $s_n \to \frac{1}{2}$ temos $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < s_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ para todo n suficientemente grande. Portanto, $0 < s_n < 1$ para todo n suficientemente grande. □

Em geral, a seguinte proposição é verdadeira:

Permanência do sinal. *Sejam (s_n) e (t_n) seq. de números reais e $a, b \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) *Se $s_n \to a$ e $a < b$, então $s_n < b$ para todo n suficientemente grande;*

(b) *Se $s_n \to a$, $t_n \to b$ e $s_n \leq t_n$ para todo n suficientemente grande, então $a \leq b$.*

Teorema do sanduíche. *Sejam (s_n), (t_n) e (r_n) seq. de números reais e seja $a \in \mathbb{R}$. Se $s_n \to a$, $t_n \to a$ e $s_n \leq r_n \leq t_n$ para todo n suficientemente grande, ent ao $r_n \to a$.*

Exemplo. $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Demonstração. Com efeito, provar que $\sqrt[n]{n} \to 1$ é equivalente a provar que $s_n = \sqrt[n]{n} - 1$ converge para 0. Agora,

$$n = (1 + s_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} s_n^2$$

para todo $n \geq 2$. Portanto, $0 \geq s_n^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Pelo Teorema do sanduíche, $s_n^2 \to 0$ e, portanto, $s_n \to 0$. □

Exemplo. $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$.

Demonstração. Verifique a seguinte desigualdade:

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

para todo n. □

Propriedades aritméticas. *Se* $s_n \to a$ *e* $t_n \to b$, *então*

(a) $s_n \pm t_n \to a \pm b$;

(b) $s_n t_n \to ab$;

(c) $\frac{s_n}{t_n} \to \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$.

A seguir destacamos dois resultados técnicos que decorrem diretamente das propriedades aritméticas acima.

T1. *Sejam* (s_n) *seq. de números reais e* $a \in \mathbb{R}$ *tais que: para cada* $\delta > 0$ *existem seq.* (a_n), (b_n) *com* $a_n \to 1$, $b_n \to 0$ *e satisfazendo*

$$b_n + a_n(a - \delta) < s_n < b_n + a_n(a + \delta)$$

para todo n *suficientemente grande. Então,* $s_n \to a$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_n + a_n(a - \frac{\epsilon}{2}) < s_n < b_n + a_n(a + \frac{\epsilon}{2})$$

para todo $n > n_0$. E, desde que $b_n \to 0$ e $a_n \to 1$ ($b_n \pm a_n(a \pm \frac{\epsilon}{2}) \to (a \pm \frac{\epsilon}{2})$), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n + a_n(a - \frac{\epsilon}{2}) > (a - \epsilon)$ e $b_n + a_n(a + \frac{\epsilon}{2}) < (a + \epsilon)$ para todo $n > n_1$. Juntando as ocorrências acima, concluímos que

$$(a - \epsilon) < s_n < (a + \epsilon)$$

para todo $n > \max\{n_0, n_1\}$. □

T2. *Sejam* (t_n) *seq. de números reais e* $a \in \mathbb{R}$ *tais que: para cada* $\epsilon > 0$ *existem seq. de números reais* (a_n) *e* (b_n) *satisfazendo* $a_n \to 1$, $b_n \to 1$ *e*

$$b_n(a - \epsilon) < t_n < a_n(a + \epsilon)$$

para todo n *suficientemente grande. Então,* $t_n \to a$.

Exercícios Resolvidos

ER1. Seja (s_n) uma seq. de números reais. Se $s_n \to a$, então $\dfrac{s_1 + \cdots + s_n}{n} \to a$.

Solução. Seja $t_n = \dfrac{s_1 + \ldots + s_n}{n}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(a-\epsilon) < s_n < (a+\epsilon)$ para todo $n > n_0$, desde que $s_n \to a$. Assim, escrevendo

$$t_n = \frac{s_1 + \cdots + s_{n_0} + \cdots + s_n}{n},$$

vemos que

$$b_n + a_n(a-\epsilon) < t_n < b_n + a_n(a+\epsilon)$$

para todo $n \geq n_0$, em que $a_n = \dfrac{n - n_0}{n}$ e $b_n = \dfrac{s_1 + \cdots + s_{n_0}}{n}$. E, o que desejávamos provar segue do resultado técnico T1.

$\square$

ER2. Seja (s_n) uma seq. de números reais positivos. Se $s_n \to a$, então, $\sqrt[n]{s_1 \cdots s_n} \to a$.

Solução. (Caso $a > 0$.) Seja $t_n = \sqrt[n]{s_1 \cdots s_n}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(a-\epsilon) < s_n < (a+\epsilon)$ para todo $n > n_0$, desde que $s_n \to a$. Assim, escrevendo

$$t_n = \sqrt[n]{s_1 \cdots s_{n_0} \cdots s_n},$$

vemos que

$$b_n(a-\epsilon) < t_n < a_n(a+\epsilon)$$

para todo $n \geq n_0$, em que $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{s_1 \cdots s_{n_0}}{(a+\epsilon)^{n_0}}}$ e $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{s_1 \cdots s_{n_0}}{(a-\epsilon)^{n_0}}}$. E, o que desejávamos provar do resultado técnico T2.

O caso $a = 0$ pode ser tratado de forma análoga.

$\square$

ER3. Sejam (s_n) e (t_n) seq. de números reais tais que $s_1 + \cdots + s_n \to +\infty$ e $s_n \geq 0$ para todo n. Se $\dfrac{t_n}{s_n} \to a$, então $\dfrac{t_1 + \cdots + t_n}{s_1 + \cdots + s_n} \to a$.

Solução. (Caso $a > 0$.) Seja $S_n = s_1 + \cdots + s_n$. Dado $\epsilon > 0$, como $\dfrac{t_n}{s_n} \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n(a-\epsilon) < t_n < s_n(a+\epsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Denotemos $A = t_1 + \cdots + t_{n_0}$ e $B = s_1 + \cdots + s_{n_0}$. Assim,

$$b_n + a_n(a-\epsilon) < \frac{t_1 + \cdots + t_n}{S_n} < b_n + a_n(a+\epsilon),$$

para todo $n > n_0$, em que $b_n = \dfrac{A}{S_n}$ e $a_n = \dfrac{S_n - B}{S_n}$. E, o que desejávamos provar segue do resultado técnico T1.

$\square$

ER4.
$$\frac{1^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \to \frac{1}{p+1}$$
para todo $p \in \mathbb{N}$.

Solução. Faremos uso do seguinte

Lema.
$$\frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} \to \frac{1}{p+1}.$$

Sejam (t_n) e (s_n) as seq. de números reais definidas por $t_n = n^p \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, $s_1 = 1$ e $s_n = n^{p+1} - (n-1)^{p+1}$, $\forall \ n \geq 2$. Temos que $s_n \geq 0$ para todo n, $s_1 + \cdots + s_n = n^{p+1} \to +\infty$ e,além disso, utilizamos o lema acima para receber $\dfrac{t_n}{s_n} \to \dfrac{1}{p+1}$.
$\therefore$ Decorre do ER3 que
$$\frac{1^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \to \frac{1}{p+1}.$$
$\square$

ER5. Sejam (x_n) uma seq. de números reais positivos e $k > 0$ um inteiro ímpar tais que
$$x_{n+1}^2 = x_n + k \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Mostre que x_n é irracional para algum n.

Solução. Sejam (x_n) uma seq. de números reais positivos e $k > 0$ um inteiro ímpar tais que
$$x_{n+1}^2 = x_n + k \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Afirmamos que (x_n) limitada. De fato, seja $A > x_1$ um número real tal que $A^2 > A + k$. Portanto, por indução sobre n, é fácil ver que $0 < x_n < A$ para todo n. Agora, afirmamos que (x_n) é monótona a partir de um certo n_0. Com efeito, se (x_n) for crescente, nada temos a mostrar. Caso contrário, existe um n_0 tal que $x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$; daí vê-se que (x_n) é não-crescente a partir de n_0. Assim, concluímos que (x_n) converge, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to a$. Desde que
$$x_{n+1}^2 = x_n + k \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$
a satisfaz a equação $a^2 = a + k$ e, como k é um inteiro ímpar, a não pode ser inteiro.

Por outro lado, Suponhamos que x_n seja racional para todo n. Escrevamos $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ com p_n e q_n inteiros positivos e relativamente primos. Assim

$$\frac{P_{n+1}^2}{q_{n+1}^2} = x_{n+1}^2 = x_n + k = \frac{p_n + kq_n}{q_n}$$

e, portanto, $q_{n+1}^2 = q_n$ para todo n. Dessa eq., obtemos que $q_n = \sqrt[2^n]{q_1}$ para todo n. Logo, $q_n = 1$, ou seja, x_n é inteiro para n suficientemente grande. Absurdo, pois (x_n) converge para um número real que não é inteiro

$\square$

Uma seq. de números reais (s_n) é dita uma *seqüência de Cauchy* se para cada $\epsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - s_m| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad m, n \geq p$$

Proposição. *Seja (s_n) uma seq. de números reais. Então, (s_n)é convergente se, e somente se, (s_n) é uma seq. de Cauchy.*

Exercícios

Exercício 0. Seja (a_n) a seq. de números reais definida por

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Mostre que (a_n) é uma seq. convergente. Denotamos por e o limite da seq. (a_n).

Exercício 1. O objetivo desse exercício é mostrar que a seq. (b_n) definida por $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ converge para e.

(a) Verifique a igualdade $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$

(b) Mostre que $\displaystyle\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$, para todo inteiro $0 \leq k \leq n$, e conclua que $b_n \leq a_n$ em que $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Em particular, $b_n \leq e$ para todo n.

(c) Use a desigualdade

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq j \leq n,$$

para verificar que

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \quad \text{para todo} \quad 0 \leq k \leq n.$$

Daí, conclua que a seq. (b_n) é crescente.

A partir de (b) e (c), conculímos que existe o limite d da seq. (b_n) e $d \leq e$.

(d) Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos a seq. (s_n) definida por $s_n = \displaystyle\binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$, se $n \geq k$, e $s_n = 0$ caso contrário. Mostre que $s_n \to \dfrac{1}{k!}$. Em particular, $d \leq a_n$ para todo n e, concluímos a igualdade $d = e$.

Exercício 2. Seja (s_n) uma seq. de números reais. Se $s_n > 0$ (respectivamente $s_n < 0$) para todo n suficientemente grande e $\dfrac{1}{s_n} \to 0$, dizemos que (s_n) *converge para mais (respectivamente menos) infinito* e denotamos $s_n \to +\infty$ (respectivamente $s_n \to -\infty$).

Sejam (s_n) e (t_n) seq. de números reais. Mostre que

(a) Se $s_n \to +\infty$ e (t_n) é limitada inferiormente, então $s_n + t_n \to +\infty$.

(b) Se $s_n \to +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $t_n > c$ para todo n suficientemente grande, então $s_n t_n \to +\infty$.

Exercício 3. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e (s_n) uma seq. de números reais. Mostre que se (s_n) não converge para a então exitem $\epsilon > 0$ e uma subseq. (s_{n_k}) de (s_n) tais que $|s_{n_k} - a| \geq \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 4. $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

Exercício 5. Seja (s_n) uma seq. de númeors reais. Se $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} \to c$ para algum e $0 < c < 1$, então $s_n \to 0$.

Exercício 6. Seja (s_n) uma seq. de númeors reais. Se $|s_{n+1} - s_n| < \dfrac{1}{2^n}$ para todo n suficientemente grande, então (s_n) converge.

Exercício 7. Dê um exemplo de uma seq. de números reais (s_n) tal que (s_n) não convirja, mas $|s_{n+1} - s_n| < \dfrac{1}{n}$ para todo n suficientemente grande.

Exercício 8. Seja (s_n) uma seq. de números reais e seja a um número real. Mostre que: se para cada $\epsilon > 0$ existem infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $|s_n - a| < \epsilon$, então (s_n) possui uma subseq. que converge para a.

Exercício 9. Seja Seja (c_n) a seq. de números reais definida por $c_n = \cos(n)$. Mostre que (c_n) possui uma subseq. que converge para 1.
(Sugestão: para cada $a < b$ existem $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que $a < n+2\pi m < b$.)

Exercício 10. Calcule, caso exista, o limite da seq. (s_n) dada por $s_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

Exercício 11. Dado $a > 0$, mostre que para qualquer valor de $x_1 > 0$ a seq. (x_n) definida recorrentemente por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

converge para $\sqrt{a}$.

Séries de números reais

Aula ?

O objetivo deste capítulo é o estudo de somas infinitas de números reais tais como já apresentadas no estudo de seq.

Seja (a_n) uma seq. de números reais. À expressão formal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ chamaremos de *série (de n-ésimo termo a_n)* e diremos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge* para um número real s se a seq. de *somas parciais* (S_n) definida por $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge para s. Nesse caso, denotamos $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ou ainda, $s = a_1 + \cdots + a_n + \cdots$.

Exemplo.

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Ou, equvalentemente, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge para 2. Em geral, a série $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ converge para $\frac{a}{1-a}$ sempre que $|a| < 1$.

Exemplo. Seja $a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k(k+1)} = a.$$

O teorema a seguir é o primeiro teste para decidir a respeito da não convergência de uma série de números reais.

Proposição. *Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série de números reais. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, então $a_n \to 0$.*

Exemplo. A série $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k)$ é divergente.

Proposição. *Seja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série de números reais. Então, as seguintes afirmações são mutuamente equivalentes:*

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é convergente;*

(b) $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ *é convergente para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(c) *Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$ *para todo* $m > n > k_0$.

Como aplicação do teorema acima mostremos a divergência da *série harmônica* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Com efeito, basta observar que $|\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}| > \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; portanto, utilizamos a afirmação (d) do teorema acima para concluir que a série harmônica diverge.

Teste da Comparação. *Seja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série tal que* $a_k \geq 0$ *para todo* k *suficientemente grande.*

(a) *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge e* $|b_k| \leq a_k$ *para todo* k *suficientemente grande, então* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge;*

(b) *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge e* $b_k \geq a_k$ *para todo* k *suficientemente grande, então* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge.*

Exemplo. Desde que $2k^2 \geq k(k+1)$ para todo $k \geq 1$, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. Em particular, se $p(X)$ é um polinômio real de grau maior do que 1 e coeficiente líder positivo, então $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p(n)}$ converge.

Ainda como aplicação do Teste da comparação, temos o seguinte

Corolário. *Se* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *converge, então* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge.*

A respeito da recíproca do corolário acima, o seguinte exemplo testefica a não veracidade dessa afirmação.

Exemplo. A série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ é convergente.

Teste da razão. *Seja* (a_k) *uma seq. de números reais. Se existe um número real* $0 \leq a < 1$ *tal que* $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}| < a$ *para todo* k *suficientemente grande, então a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é convergente.*

Exemplo. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2003}}{2^k}$ é convergente.

Teste da raiz. *Seja* (a_k) *uma seq. de números reais. Se existe um número real* $0 \leq a < 1$ *tal que* $\sqrt[k]{|a_k|} < a$ *para todo* k *suficientemente grande, então a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é convergente.*

Exemplo. A série $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\log(k)}{k} \right)^k$ é convergente.

Séries de Potências

A expressão abaixo
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$$
é chamada *série de potências* em $a \in \mathbb{R}$ com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}$.

Dizemos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$ *converge em* $x \in \mathbb{R}$ se a série de números reais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converge. Caso contrário, dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$ *diverge em* $x \in \mathbb{R}$.

Para cada série de potências formal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$ considere $D \subset \mathbb{R}$ (maximal) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converge para todo $x \in D$. Dessa forma, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$ define uma função $D \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

Exemplos.

- Para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$, $D = \mathbb{R}$.
- Para $\sum_{n=0}^{\infty} n! X^n$, $D = \{0\}$.
- Para $\sum_{n=0}^{\infty} n X^n$, $D = (-1, 1)$.

Proposição. *Se a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$ *converge em* $\alpha \neq a$, *então converge em todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x-a| < |\alpha - a|$.

Demonstração. Daqui a pouco. $\square$

Teorema. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$ *uma série de potências que converge em algum* $\alpha \neq a$. *Então, existe* $R > 0$ *(possivelmente* $R = +\infty$*) tal que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (X-a)^n$ *converge em todo* $x \in \mathbb{R}$; $|x-a| < R$ *e diverge em todo* $x \in \mathbb{R}$; $|x-a| > R$.

Demonstração. Seja $D = \{\alpha \in \mathbb{R} \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ converge em $\alpha\}$. Se D é ilimitado, entõ $R = +\infty$. Suponhamos que D seja limitado e seja $R = sup\{|\alpha - a| \ : \ \alpha \in D\}$. Afirmamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ converge em todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < R$. De fato, é suficiente tomar $\alpha \in D$ tal que $|x-a| < |\alpha - a|$ e recorrer à proposição acima para justificar tal afirmação. Também, é claro que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ diverge em todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| > R$, visto a supremacia de R. $\square$

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ converge somente em a, dizemos que o seu *raio de convergência* é 0. Caso contrário, dizemos que o seu *raio de convergência* é o número $R > 0$ (possivelmente $R = +\infty$) concebido no teorema acima.

Observação. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ converge absolutamente para todo $x \in (a-R, a+R)$.

Sobre a continuidade das séries de potências, temos o seguinte resultado.

Teorema. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$. Então a função $S\colon (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ dada por $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ é contínua.*

Demonstração. Destaquemos os seguintes resultados.

Desigualdade. *Dados $x, h \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$|(x+h)^n - x^n| \leqslant n(|x| + |h|)^{n-1}|h|.$$

Lema. *A série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(X-a)^n$ converge absolutamente em todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < R$.* $\square$

ER6. Seja (a_n) uma seq. de números reais positivos. Mostre que não é possível que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 a_k}$ convirjam simultaneamente.

Solução. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$a_k + \frac{1}{k^2 a_k} \geq \frac{2}{k}.$$

E, o resultado segue do fato da série harmônica não convergir.

$\square$

ER7. Seja (a_n) uma seq. de números reais. Se $\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ converge.

Solução. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$\frac{1}{2}\left({a_k}^2 + \frac{1}{k^2}\right) \geq \frac{|a_k|}{k}.$$

E, o resultado segue do fato da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergir.

$\square$

ER8. Se $p > 1$, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.

Solução. Por indução sobre n, mostramos que vale a desigualdade:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx < \frac{p}{p-1}.$$

Portanto, fica provado que $p > 1$ implica que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ éconvergente.

$\square$

Lista de exercícios

1. Seja (x_n) uma seq. de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $s_n = sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, caso exista tal supremo. Denotamos por $\lim sup\ x_n$ o limite da seq. (s_n). Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$. Então

a) se a seq. de números reais $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é ilimitada, então o raio de convergência da série acima é $R = 0$;

b) se $\lim sup\ \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, então o raio de convergência da série acima é $R = +\infty$;

c) se $\lim sup\ \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 0$, então o raio de convergência da série acima é $R = \dfrac{1}{\rho}$.

Em particular, conclua que se $\sqrt[n]{|a_n|} \to \rho$, então o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$$

é $R = +\infty$ quando $\rho = 0$ e $R = \dfrac{1}{\rho}$ quando $\rho > 0$.

2. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ um série de potências com raio de convergência $R > 0$ (possivelmente $R = +\infty$). Mostre que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(X-a)^{n-1} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(X-a)^{n+1}$$

têm raio de convergência R.

3. Determine o raio de convergência das seguintes séries:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^n$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n} X^n$.

4. Mostre que os zeros de uma função analítica são isolados.

5. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X-a)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$ (possivelmente $R = +\infty$). Mostre que a função $f\colon (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ é de classe C^{∞} com

$$f^{(p)}(a) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(p-1))(X-a)^{n-p}$$

para todo $p \in \mathbb{N}$..