Tópicos de Topologia

Aula do dia 16 de maio

Data de entrega: até o final do curso

Este é um estudo dirigido, o qual está contido nas páginas 85–89 do livro-texto do curso, cujo objetivo é apresentar uma prova do Teorema de Separação de Jordan-Brouwer via a Teoria do Grau de Brouwer mod 2.

Seja X uma variedade suave, conexa, compacta de dimensão n. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação suave. Para cada $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ fora da imagem de f, definimos o *número de voltas mod 2* que f dá em torno de z como o grau mod 2 da seguinte aplicação de X em $\mathbb{S}^n$:

$$x \mapsto \frac{f(x) - z}{\|f(x) - z\|}.$$

O número definido acima será denotado por $W_2(f, z)$.

Os exercícios de 1 a 10 abaixo compõem a lista de exercícios deste estudo. O objetivo dos 3 primeiros exercícios abaixo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 0.1. *Admita que X seja o bordo de uma ∂-variedade suave e compacta D e seja $F\colon D \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma extensão suave da aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^{n+1}$. Se $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ é uma valor regular de F que está fora da imagem de f, então $F^{-1}(z)$ é um conjunto finito com k elementos e os números $W_2(f, z)$ e k têm mesma paridade.*

Os exercícios de 1 a 3 estão nas condições apresentadas no teorema acima.

1) Se z está fora da imagem de F, então $W_2(f, z) = 0$.

2) Considere $F^{-1}(z) = \{y_1, \ldots, y_k\}$ e, em torno de cada y_i, seja B_i um subconjunto de D, disjunto de ∂D, difeomorfo a uma bola euclidiana de

dimensão n+1, de sorte que B_i não intersecta B_j para $i \neq j$. Seja $f_i \colon \partial B_i \to \mathbb{R}^{n+1}$ a restrição de F a ∂B_i. Prove que

$$W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \cdots + W_2(f_k, z) \text{ mod } 2.$$

3) Use a regularidade de z para escolher bolas B_i tais que $W_2(f_i, z) = 1$ e conclua a prova do teorema.

Daqui por diante, assumiremos que $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade suave, conexa, compacta de dimensão n+1. Nos exercícios a seguir, usaremos $W_2(X, z)$ para denotar o número de voltas mod 2 que a aplicação inclusão de X em $\mathbb{R}^{n+1}$ dá em torno de um ponto que não está em X.

4) Seja $z \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash X$. Mostre que, dado um ponto qualquer $x \in X$ e $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma vizinhança aberta de x em $\mathbb{R}^{n+1}$, então existe um ponto de U que pode ser conectado ao ponto z por um arco contínuo que não intersecta X.

5) Mostre que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ possui no máximo duas componentes conexas.

6) Mostre que se z_1 e z_2 pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$, então $W_2(X, z_1) = W_2(X, z_2)$.

7) Dados $z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ e $v \in \mathbb{S}^n$, denote por $r(z, v)$ a semirreta que parte de z na direção v;

$$r(z, v) = \{z + tv \mid t \geq 0\}.$$

Mostre que $r(z, v)$ é transversal a X para quase todo $v \in \mathbb{S}^n$.

8) Dados $z \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash X$ e $v \in \mathbb{S}^n$, tais que $r(z, v)$ intersecta X tranversalmente. Seja z_1 outro ponto de $r(z, v)$ que não pertence a X. Seja k o número de vezes que $r(z, v)$ intersecta X entre z e z_1. Mostre que $W_2(X, z) = W_2(X, z_1)$ mod 2.

9) Conclua que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ possui exatmente duas componentes,

$$\{z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X \mid W_2(X, z) = 0\} \text{ e } \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus X \mid W_2(X, z) = 1\}.$$

10) **Teorema de Separação de Jordan-Brouwer**. O complementar de uma variedade suave compacta, conexa e de codimensão 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem exatamente duas componentes conexas; uma delas limitada.