

Análise no $\mathbb{R}^n$ -Primeira prova

Alexandre Fernandes

17 de abril de 2017

1. Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para cada uma das afirmações abaixo.
(3 pontos)

- a. $(A \cup B)' = A' \cup B' \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ (V)
- b. $(A \cap B)' = A' \cap B' \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ (F)
- c. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ (V)
- d. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ (F)
- e. $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B) \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ (F)
- f. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B) \forall A, B \subset \mathbb{R}^n$ (V)

2. Considere as letras maiúsculas abaixo (desprovidas das extremidades).
Agrupe-as em classes de figuras homeomorfas. (2 pontos)

A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z

Solução. Por causa de imprecisões na figura R as duas soluções a seguir são consideradas corretas:

Sol 1. [A, R], [B], [C, G, I, J, L M, N, S, U, V, Z], [D, O], [E, F, T], [H], [P, Q], [X];

Sol 2. [A], [B], [C, G, I, J, L M, N, S, U, V, Z], [D, O], [E, F, T], [H], [P, Q], [R], [X].

3. Sejam $p = (1, 0), q = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que qualquer caminho γ em $\mathbb{R}^2$ que conecta p a q e não passa pelo interior do primeiro quadrante tem comprimento pelos menos igual a 2. (1 ponto)

Solução. Seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($\gamma(t) = (x(t), y(t))$) um caminho tal que $\gamma(0) = (1, 0)$, $\gamma(1) = (0, 1)$ e $\gamma(t)$ não pertence ao interior do primeiro quadrante para todo $t \in [0, 1]$. Seja t_0 o supremo dos t 's para os quais $\gamma(t)$ pertence ao eixo- x , em outras palavras, t_0 é o supremo dos t 's para os quais $y(t) = 0$. Pela continuidade da função $y(t)$, segue que $y(t_0) = 0$ e, como $y(1) = 1$, segue que $t_0 < 1$. Agora, como $y(t_0) = 0$ (caso $\gamma(t)$ fosse negativo para algum $t \geq t_0$, como $y(1)$ é positivo, teríamos outro zero de $y(t)$ entre t_0 e 1, o que contradiz a maximalidade de t_0) segue que $x(t_0) \leq 0$, pois caso contrário, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, teríamos $\gamma(t_0 + \epsilon)$ no interior do primeiro quadrante (absurdo!!!!). Assim, para a partição P de $[0, 1]$ dada por $0 < t_0 < 1$ temos.

$$\begin{aligned} L(\gamma, P) &= \|\gamma(t_0) - \gamma(0)\| + \|\gamma(1) - \gamma(t_0)\| \\ &= |x(t_0) - 1| + \sqrt{[x(t_0)]^2 + 1} \\ &\geq 1 + 1. \end{aligned}$$

4. Para cada $i = 1, \dots, n$ seja $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção na i -ésima coordenada; $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

- $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, $\pi_i(K) \subset \mathbb{R}$ é compacto para todo $i = 1, \dots, n$. (2 pontos)
- $C \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, $\pi_i(C) \subset \mathbb{R}$ é conexo para todo $i = 1, \dots, n$. (2 pontos)

Solução. As duas afirmações acima são falsas; o contra-exemplo abaixo, dado em $\mathbb{R}^2$, funciona para as duas afirmações.

