

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Segunda prova

Alexandre Fernandes

17 de maio de 2017

1. (2 pontos) Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e conexo e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e não constante. Mostre que existe um caminho regular (velocidade nunca se anula) de classe C^1 $\gamma: (a - \epsilon, a + \epsilon) \rightarrow U$ tal que $f \circ \gamma(t) = t$ para todo $t \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Solução. Como f não é constante e U é aberto conexo, existe um ponto $p = (x_0, y_0) \in U$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Pela Forma Local das Submersões, existe uma bola B em $\mathbb{R}^2$ de centro na origem e um difeomorfismo de classe C^1 $\varphi: B \rightarrow A$ sobre um aberto $A \subset U$ de forma que

$$f \circ \varphi(x, y) = x + f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B.$$

Sejam $\epsilon > 0$ o raio da bola B , $a = f(x_0, y_0)$ e $\gamma: (a - \epsilon, a + \epsilon) \rightarrow U$ dada por $\gamma(t) = \varphi(t - a, 0)$. É fácil ver que γ satisfaz o que foi solicitado no problema.

2. (2 pontos) Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e conexo e $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Mostre que: se a imagem da aplicação $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, tem interior vazio, então f e g são funções constantes.

Solução. Se o determinante jacobiano da aplicação F não fosse nulo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, a imagem de F conteria um aberto. Como estamos supondo que essa imagem tem interior vazio, segue que esse determinante jacobiano é nulo em todo ponto de U . Por outro lado, veja que o determinante jacobiano da aplicação F no ponto (x, y) é igual a

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right]^2$$

ou ainda

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right]^2.$$

Daí, segue que, f e g possuem gradientes nulos no aberto conexo U . Portanto, f e g são constantes em U .

3. (2 pontos) Seja $K \subset \mathbb{R}^4$ o subconjunto abaixo

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = w\}.$$

Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação diferenciável (não necessariamente de classe C^1) cuja imagem é exatamente o conjunto K . Mostre que existe um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ em que a derivada de F se anula.

Solução. Seja $p \in \mathbb{R}^3$ um ponto tal que $F(p) = O \in K$ ($O = (0, 0, 0, 0)$). Como a imagem de F está contida no conjunto K temos que a imagem da derivada $DF(p): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ está contida no espaço tangente $T_O K$. Portanto, para concluir que $DF(p)$ é a aplicação nula, é bastante provar que $T_O K$ é igual a $\{O\}$. Seja $\gamma: (-r, r) \rightarrow K$ tal que $\gamma(0) = O$ e $\gamma'(0) = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Dessa forma, podemos escrever

$$\gamma(t) = (tx(t), ty(t), tz(t), tw(t))$$

em que $x(t), y(t), z(t), w(t)$ são funções contínuas e

$$x(0) = v_1, \quad y(0) = v_2, \quad z(0) = v_3, \quad w(0) = v_4.$$

Como, $\gamma(t) \in K$, $tw(t) \geq 0$ para todo $t \in (-r, r)$, logo $v_4 = w(0) = 0$. Também, como $\gamma(t) \in K$,

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = w(t)^2 \quad \forall t \in (-r, r),$$

portanto $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0$ e, portanto, $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ também. Portanto, mostramos que $T_O K = \{O\}$.

4. (2 pontos) Mostre que um aberto de $\mathbb{R}^n$ não pode ser difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^m$ se $m \neq n$.

Solução. Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Seja $F: A \rightarrow B$ difeomorfismo com inversa $G: B \rightarrow A$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$ pontos tais que $F(a) = b$ e $G(b) = a$. Pela regra da cadeia, segue que a aplicação linear $DF(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo com inversa $DG(b): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Segue, de argumentos elementares da álgebra linear, que $m = n$.

5. (2 pontos) Mostre que o subconjunto $G \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$ das matrizes de determinante igual a 1 é uma superfície de classe C^∞ e de dimensão 3.

Solução. Seja $f: M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (função determinante) dada por

$$f \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = xw - yz.$$

Vemos que $G = f^{-1}(1)$. Portanto, para mostrar que G é superfície de classe C^∞ e de dimensão 3, é suficiente mostrar que 1 é valor regular de f . Para tanto, observe que o gradiente de f no ponto (ou matriz) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ é igual a $(w, -z, -y, x)$ que não se anula para qualquer que seja a matriz de determinante igual a 1. Logo 1 é valor regular de f como desejávamos provar.