Tópicos de Matemática I - Lista 01

Data de entrega

28 de março 2016

1) Prove o Teorema da Aplicação Inversa para aplicações suaves entre variedades.

Teorema da Aplicação Inversa. *Sejam M e N variedades suaves e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se $d_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N$ é um isomorfismo linear, então existem vizinhanças abertas $A \subset M$ de x e $B \subset N$ de $f(x)$ tais que a restrição de f a A define um difeomorfismo sobre B.*

2) Sejam M e N variedades suaves e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se f é uma imersão injetiva e própria (ou seja, um mergulho), então $f(M)$ é uma subvariedade suave de N.

3) Sejam M e N variedades suaves e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se f é uma submersão, então, para todo y na imagem de f, $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade suave de M de codimensão igual a $\dim(N)$.

4) Sejam M uma variedade suave de dimensão m e seja $Z \subset M$ uma subvariedade suave de dimensão k. Mostre que: para cada $x \in Z$ existem uma vizinhança aberta $A \subset M$ de x, um difeomorfismo f de A sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$, tal que a restrição de f a $A \cap Z$ define um difeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ (onde $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$).

5)Seja $M(2)$ o conjunto das matrizes reais de ordem 2×2. Via a identificação natural de $M(2)$ com $\mathbb{R}^4$, mostre que o subconjunto de $M(2)$ formado pelas matrizes de posto 1 é uma variedade suave de dimensão 3.