Tópicos de Matemática I - Lista 07

Data de entrega

11 de maio 2016

1) Sejam M e N variedades suaves de mesma dimensão. Suponha que exista um difeomorfismo local $f\colon M \to N$. Mostre que: se N é orientável, então M também é orientável.

2) Sejam M e N variedades suaves de mesma dimensão em que M é conexa e está orientada. Suonha que exista um difeomorfismo local e sobrejetor $f\colon M \to N$. Mostre que: se $[d_y f]^{-1} \cdot d_x f\colon T_x M \to T_y M$ é um isomorfismo positivo para quaisquer $x, y \in M$ com $f(x) = f(y)$, então N é orientável.

3) Suponha que exista uma variedade suave $\mathbb{P}^m$, de dimensão m, com a seguinte propriedade: existe um difeomorfismo local e sobrejetor $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{P}^m$ tal que $f(p) = f(q)$ se, e somente se, $p = q$ ou $p = -q$. Mostre que $\mathbb{P}^m$ é orientável se, e somente se, m é um número ímpar.

4) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave de codimensão 1 em $\mathbb{R}^n$. Mostre que M é orientável se, e somente se, existe um campo contínuo de vetores $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ normal a M (v(x) perpendicular a $T_x M$ $\forall\ x \in M$) e que nunca se anula.

5) Seja M uma variedade suave e orientável. Mostre que toda subvariedade de M, obtida como imagem inversa de um valor regular de uma função suave $M \to \mathbb{R}$, é orientável.