Tópicos de Matemática I - Lista 10

Data de entrega

10 de junho 2016

1) Sejam X variedade suave, compacta, orientada, m-dimensional e $f, g\colon \to \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{z\}$ duas aplicações suaves. Mostre que: se f e g são homotópicas, então os números de voltas $W(f, z)$ e $W(g, z)$ são iguais.

2) Seja Gl_m o subconjunto das matrizes reais de ordem $m \times m$ ($M_{m\times m}(\mathbb{R})$) que são invertíveis. Mostre que Gl_m é um subconjutno aberto de $M_{m\times m}(\mathbb{R})$ que possui exatamente as seguintes componentes conexas:

$$Gl_m^+ = \{A \in M_{m\times m}(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\} \quad Gl_m^- = \{A \in M_{m\times m}(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\}.$$

Além disso, dado um isomorfismo linear $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, cuja matriz na base canônica é $A \in Gl_m$, temos que, para qualquer esfera S^{m-1} centrada na origem, o número de voltas de $\begin{array}{ccc} S^{m-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & \frac{T(x)}{\|T(x)\|} \end{array}$ em torno da origem vale $\frac{\det(A)}{\|\det(A)\|}$.

3) Prove o caso especial do Teorema do grau de Hopf em dimensão 1. Em outras palavras, mostre que toda aplicação suave $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ de grau zero é homotópica a uma constante.

4) Seja W uma ∂-variedade suave e compacta. Mostre que toda aplicação suave $\partial W \to \mathbb{R}^N$ admite uma extensão suave $W \to \mathbb{R}^N$.

5) (Teorema do grau de Hopf para aplic contínuas). Seja M uma variedade suave, compacta, orientada, conexa e de dimensão m. Mostre que duas aplicações contínuas $M \to \mathbb{S}^m$ são homotópicas se, e somente se, possuem o mesmo grau. (Sugestão: assuma o Teorema do grau de Hopf para aplicações suaves).