Introdução à Topologia Diferencial

Prof. Alexandre Fernandes

Aula 1 - 03 de janeiro de 2018

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Uma aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^k$ é dita *suave* se: para cada ponto $p \in X$, existem $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto que contém p e $F\colon U \to \mathbb{R}^k$ diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $F_{|U\cap X} = f_{U\cap X}$.

Para refletir. Se $f\colon X \to \mathbb{R}^k$ é suave, então existe $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $F_{|X} = f$?

Propriedades.

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Nesse caso, a aplicação identidade $X \to X \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação suave.

2. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^k$ subconjuntos. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}^q$ são aplicações suaves, então $g \circ f\colon M \to \mathbb{R}^q$ é uma aplicação suave.

Definição 0.1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^k$ subconjuntos. Dizemos que X é *difeomorfo a* Y se existe uma aplicação suave $\varphi\colon X \to Y$ com inversa $\varphi^{-1}Y \to X$ também suave. Neste caso, φ e ψ são chamados de *difeomorfismos.*

Exemplos.

1. A esfera $\mathbb{S}^2$ é difeomorfa ao elipsóide $\{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\}$ com $a, b, c > 0$. De fato, o difeomorfismo é dado por
$$(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz).$$

2. Para qualquer $p \in \mathbb{S}^n$, tem-se que $\mathbb{S}^n \setminus p$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, o difeomorfismo é a clássica aplicação estereográfica.

3. Para qualquer $p \in \mathbb{R}^n$, tem-se que $\mathbb{R}^n \setminus p$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. De fato, uma simples translação nos dá um difeomorfismo entre $\mathbb{R}^n \setminus p$ e $\mathbb{R}^n \setminus 0$ e, $\varphi(u) = (\dfrac{u}{|u|} \log(u))$ define um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus 0$ sobre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

4. $\mathbb{S}^2$ não é difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Nesse caso, o obstáculo para existência de difeomorfismo entre esses conjuntos mora no campo da Topologia Algébrica; esses conjuntos não possuem o mesmo tipo de homotopia, portanto não são, nem mesmo, homeomorfos.

5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Se $f\colon M \to \mathbb{R}^k$ é uma aplicação suave, então o gráfico de f é difeomorfo a M.

6. O gráfico $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ não é difeomorfo ao gráfico $z = x^2 + y^2$. Até o final desta aula, via a definição de conjuntos suaves, justificaremos essa afirmação.

A aplicação derivada

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto e seja $f\colon X \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação suave. Para cada $p \in X$, objetivamos definir a *derivada* de f em p (denotada por d_pf). Sabemos que existem $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto que contém p e $F\colon U \to \mathbb{R}^k$ diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $F_{|U\cap X} = f_{U\cap X}$. Assim, naturalmente, veremos d_pf como uma restrição da aplicação linear $d_pF\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a algum subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A seguir, apresentaremos um domínio natural para d_pf.

Espaços tangentes

$$T_pX = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \gamma'(0);\ \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to X \text{ e } \gamma(0) = p\}.$$

O conjunto T_pX, definido acima, é conhecido como *o espaço tangente* a X no ponto p.

Exemplos

1. Se $U \subset \mathbb{R}^k$ é um subconjunto aberto, então $T_pU = \mathbb{R}^k$.

2. Veremos que $T_p\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \ < v, p >= 0\}$.

3. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = y^3\}$; $T_{(0,0)}X$ é igual ao ponto $\{(0, 0)\}$.

4. Seja $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$; $T_{(0,0,0)}Z$ é o ponto $\{(0, 0, 0)\}$.

Então, dizemos que a *derivada* de f no ponto $p \in X$ é a aplicação

$$d_pf\colon T_pX \to \mathbb{R}^k$$

dada pela restrição de d_pF a T_pX. Vale observar que a definição dada independe da escolha da função F.

Proposição 0.2 (Regra da Cadeia)**.**

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f.$$

Proposição 0.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^k$ subconjuntos. Se $f: X \to Y$ é um difeomorfismo suave com inversa $g: Y \to X$, então, para cada $p \in X$ com $q = f(p)$, tem-se que:*

$$d_p f(T_p X) = T_q Y \ \text{ e } \ d_q g(T_q Y) = T_p X.$$

Conjuntos suaves

Definição 0.4. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que M é *suave de dimensão k* se: para cada $p \in M$ existe um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, contendo p, tal que $U \cap M$ é difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^k$. Nesse caso, denotamos $\dim M = k$.

Observação. Observamos que não há ambiguidade na definição da dimensão de um conjunto suave como fizemos acima. De fato, é bastante observar que, por argumentos de álgebra linear, um aberto de $\mathbb{R}^k$ não pode ser difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^j$ se $k \neq j$.

Exemplos e propriedades.

1. Subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^k$ são suaves de dimensão k.
2. $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é suave de dimensão n.
3. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ subconjuntos. Se M é difeomorfo a N, então M é suave se, e somente se, N o é.
4. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^k$ são suaves, então $M \times N$ é suave de dimensão $\dim M + \dim N$.

Proposição 0.5. *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é suave de dimensão k, então, $\forall\ x \in M$ $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de dimensão k.*

Como algumas aplicações da última proposição citada acima, vê-se que $X = \{(x, y)\ :\ x^2 = y^3\}$ não é suave de dimensão 1, pois $T_{(0,0)}X$ é igual ao ponto $\{(0, 0)\}$ enquanto $T_x U = \mathbb{R}$ para todo $U \subset \mathbb{R}$; $x \in U$. Também, vê-se que o gráfico $\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ não é difeomorfo ao gráfico $\{z = x^2 + y^2\}$, pois $T_{(0,0,0)}\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ é o ponto $\{(0, 0, 0)\}$ enquanto $T_p\{z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial 2-dimensional para todo ponto p no conjunto.

Lista de exercícios 01

1) Prove o Teorema da Aplicação Inversa para aplicações suaves, como enunciado abaixo.

Teorema da Aplicação Inversa. *Sejam M e N suaves e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se $d_x f\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ é um isomorfismo linear, então existem vizinhanças abertas $A \subset M$ de x e $B \subset N$ de $f(x)$ tais que a restrição de f a A define um difeomorfismo sobre B.*

2) Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ suaves e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se f é uma imersão (i.e. f tem derivada injetiva em todo ponto de M), injetiva e própria (ou seja, um mergulho), então $f(M)$ é suave.

3) Sejam M e N suaves e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se f é uma submersão, isto é, $d_x f\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ é uma aplicação sobrejetora para todo $x \in M$, então, para todo y na imagem de f, $f^{-1}(y)$ é de dimensão igual a $\dim(M) - \dim(N)$.

4) Sejam M suave de dimensão m e $Z \subset M$ suave de dimensão k. Mostre que: para cada $x \in Z$ existem uma vizinhança aberta $A \subset M$ de x, um difeomorfismo f de A sobre um aberto de $\mathbb{R}^m$, tal que a restrição de f a $A \cap Z$ define um difeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ (onde $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$).

5) Seja M suave de dimensão k. Mostre que, uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ é suave se, e somente se, para cada $x \in M$ existem $U \subset M$ aberto de M contendo x, $V \subset \mathbb{R}^k$, e um difeomorfismo $\varphi\colon U \to V$ (sistema de coordenadas locais de M em torno de x) tal que $f \circ \varphi^{-1}\colon V \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$.