Introdução à Topologia Diferencial

Alexandre Fernandes

Aula 2 - 04 de janeiro 2018

Um dos objetivos desta aula é apresentar o Teorema dos Valores Regulares que, groseiramente falando, funciona como uma máquina de produzir conjuntos suaves.

Sejam M e N suaves. Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Dizemos que $q \in N$ é um *valor regular* de f se: para todo $p \in f^{-1}(q)$, tem-se que a aplicação linear

$$d_p f\colon T_pM \to T_qN$$

é uma aplicação sobrejetiva. Observe que, de acordo com a definição acima, todos os pontos de N fora da imagem de f são valores regulares de f .

Exemplos.

1. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Nesse caso, todo $q \in \mathbb{R} \setminus 0$ é valor regular de f.

2. Seja $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}$. Tem-se que, $q \in \mathbb{R}$ é valor regular de f se, e somente se, $q \notin \{-1, 1\}$.

Teorema 0.1 (Valores Regulares). *Sejam M e N suaves e seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se $q \in N$ é um valor regular na imagem de f, então $Z = f^{-1}(q)$ é suave de dimensão igual a $\dim M - \dim N$. Além disso, para todo $p \in Z$, tem-se que o espaço tangente T_pZ coincide com o núcleo da aplicação linear $d_pf\colon T_pM \to T_qN$.*

Prova. Inicialmente, é importante observar que a propriedade de um conjunto ser suave é uma condição local, em outras palavras, para mostrar que Z é suave é suficiente provar que: para todo ponto $p \in Z$, existe um aberto $A \subset Z$ de Z contendo p tal que A é suave.

Seja $\psi\colon W \cap N \to \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais de N em torno de q, com W aberto euclidiano contendo q. Dado $p \in Z$, pela continuidade da aplicação f, podemos escolher um aberto euclidiano U contendo p e tal que $f(U \cap M) \subset W \cap N$. Diminuíndo o aberto U (se necessário), podemos supor que temos um sistema de coordenadas locais $\varphi\colon U \cap M \to \mathbb{R}^m$ de M em torno de p. Seja $V = \varphi(U \cap M)$ aberto de $\mathbb{R}^m$ e, sem perda de generalidade, suponhamos que $0 = \varphi(p) \in V$. Desta forma, temos que $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon V \to \mathbb{R}^n$ é uma submersão. Pelo Teorema da Função Inversa, diminuíndo V se necessário, existem coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$, aberto $\tilde{V}$ e de $\mathbb{R}^m$ contendo 0 e um difeomorfismo $\eta\colon \tilde{V} \to V$ tal que $\eta(0) = 0$ e $g \circ \eta(x, y) = \psi(q) + x$ para todo $(x, y) \in \tilde{V}$. Assim, fica explícito que $U \cap Z$ é difeomorfo ao subconjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \ : \ x = 0\} \cap \tilde{V}$$

que é claramente suave. Então, fica provado que Z é suave.

Para provar que T_pZ coincide com o núcleo da aplicação linear observe que a aplicação f é constante ao longo de Z, portanto T_pZ está contido no núcleo K da aplicação linear $d_pf\colon T_pM \to T_qN$. Agora, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, esse núcleo é um espaço vetorial de dimensão $m - n$, isto é, T_pZ possui a mesma dimensão que o núcleo K; logo são iguais. $\square$

Teoria de conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}^n$

Lembramos que, um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito ter *medida nula* se: para cada $\epsilon > 0$, existem paralelepípedos n-dimensionais $R_1, \ldots, R_k, \ldots$ em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} volR_i < \epsilon,$$

onde, para todo paralelepípedo $R = [a_1, b_1] \times \cdots [a_n, b_n]$ em $\mathbb{R}^n$, $volR = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$.

Propriedades

1. Reunião enumerável de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de medida nula, é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ também de medida nula.

2. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula, então $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ tem medida nula para qualquer $Y \subset \mathbb{R}^m$.

3. (Fubini) Seja $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um subconjunto fechado. Se $X_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, t) \in X\}$ tem medida nula para todo $t \in \mathbb{R}^m$, então $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tem medida nula.

4. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula, então $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula.

5. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade suave de dimensão menor do que n, então $M \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula.

Teorema 0.2 (Teorema de Sard em $\mathbb{R}^n$)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ uma aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Então o conjunto dos valores singulares (não regulares) de f, $f(\Sigma(f)) \subset \mathbb{R}^n$, tem medida nula.*

Teoria de conjuntos de medida nula para variedades

Seja M uma variedade suave. Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ tem *medida nula* (relativo a M) se: para cada $p \in X$ existe um sistema de coordenadas locais $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^k$ de M, em torno de p, tal que $\varphi(X \cap U) \subset \mathbb{R}^k$ tem medida nula.

Propriedades

1. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave. Então, reunião enumerável de subconjuntos de M de medida nula é um subconjunto de M de medida nula também.

2. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves. Se $X \subset M$ tem medida nula, então $X \times Y \subset M \times N$ tem medida nula para todo $Y \subset N$.

3. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves tais que $\dim M = \dim N$. Se $f\colon M \to N$ é uma aplicação suave , então $f(X) \subset N$ tem medida nula para qualquer $X \subset M$ de medida nula.

4. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves tais que $\dim M < \dim N$. Se $f\colon M \to N$ é uma aplicação suave , então $f(X) \subset N$ tem medida nula para qualquer $X \subset M$.

Sejam M e N variedades suaves. Dada uma aplicação suave $f\colon M \to N$, definimos

$$\Sigma(f) = \{x \in M \mid d_x f\colon T_x M \to T_{f(x)} N \text{ não é sobrejetiva}\}.$$

Teorema 0.3 (Morse-Sard 1932)**.** *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves. Para qualquer aplicação suave $f\colon M \to N$, $f(\Sigma(f)) \subset N$ (o conjunto dos valores singulares de f) tem medida nula*

Lista de exercícios 02

Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves..

1) Mostre que uma reunião enumerável de subconjuntos de M de medida nula resulta em um subconjunto de M de medida nula.

2) Se $X \subset M$ tem medida nula, então $X \times N$ é um subconjunto de $M \times N$ de medida nula.

3) Se $X \subset M$ tem medida nula, então $M \setminus X$ é um subconjunto denso de M.

4) Suponha que M e N possuem a mesma dimensão. Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Se $X \subset M$ tem medida nula, então $f(X)$ é um subconjunto de N de medida nula.

5) Suponha que M e N possuem a mesma dimensão. Suponha que M seja compacta. Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação suave. Dado um valor regular $q \in N$ de f, mostre que existe uma vizinhança aberta U de y em N tal que $f^{-1}(z)$ possui a mesma quantidade de elementos que $f^{-1}(q)$ para todo $z \in U$.