Introdução à Topologia Diferencial

Alexandre Fernandes

Aula 3 - 08 de janeiro de 2018

Transversalidade

Sejam M e N suaves e seja $Q \subset N$ subconjunto suave. Uma aplicação suave $f: M \to N$ é dita *transversal a Q no ponto $p \in M$* se $f(p) \notin Q$ ou $f(p) \in Q$ e $d_p f(T_p M) + T_{f(p)}Q = T_{f(p)}N$. No caso em que f é transversal a Q em todo ponto $p \in M$, dizemos que f é *transversal a Q* e denotamos $f \pitchfork Q$.

Exemplos.

1. $f^{-1}(Q) = \emptyset \Rightarrow f \pitchfork Q$.
2. Para $Q = \{q\}$, $f \pitchfork Q$ se, e somente se, q é valor regular de f.
3. $f: M \to N$ submersão $\Rightarrow f \pitchfork Q$.
4. Para o caso em que M e Q são subconjuntos suaves de N e $f: M \to N$ é a inclusão dada por $f(x) = x$, $\forall\, x \in M$, temos que a transversalidade $f \pitchfork Q$ é equivalente a $T_p M + T_p Q = T_p N$ $\forall\, p \in N$. Nesse caso, dizemos que M é *transversal* a Q e denotamos $M \pitchfork Q$.

Teorema 0.1 (Valores Regulares Versão Geral)**.** *Sejam M e N suaves. Sejam $Q \subset N$ suave e $f: M \to N$ uma aplicação suave. Se $f \pitchfork Q$ (de forma não trivial, i.e. $f^{-1}(Q) \neq \emptyset$), então $Z = f^{-1}(Q)$ é uma subconjunto suave de M de dimensão igual a* $\dim M - \dim N + \dim Q$*. Além disso, para todo $p \in Z$, tem-se que o espaço tangente $T_p Z$ coincide com $(d_p f)^{-1}(T_{f(p)}Q)$.*

Demonstração. Como ser suave é uma condição local, é bastante provarmos que todo ponto de Z possui uma vizinhança aberta U em M tal que $U \cap Z$ é suave de dimensão $\dim M - \dim N + \dim Q$. Sejam $p \in Z$ e $q = f(p) \in Q$. Como Q é subconjunto suave de N, podemos escolher um sistema de coordenadas locais $\varphi: V \to \mathbb{R}^m$ de N em torno de q de forma que $\varphi(V \cap Q) \subset \mathbb{R}^{n-m} \times 0 \subset \mathbb{R}^n$. Seja $P: \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ a projeção ortogonal sobre

$\mathbb{R}^m$. De acordo com essa construção, $g = P \circ \varphi \colon V \to \mathbb{R}^m$ tem 0 como alor regular e $Q \cap V = g^{-1}(0)$. Para finalizar, considere uma vizinhança aberta U de M em torno do ponto p de forma que $f(U) \subset V$. Então, vemos que $U \cap Z = (g \circ f)^{-1}(0)$ e, pela hipótese de transversalidade $f \pitchfork Q$, 0 é valor regular de $g \circ f$, donde segue o resultado. $\square$

Teorema 0.2 (Lema de Transversalidade. Versão Paramétrica). *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ suaves e seja $Q \subset N$ suave. Seja $S \subset \mathbb{R}^k$ um subconjunto aberto. Se $F \colon M \times S \to N$ é uma aplicação suave transversal a Q, então, para $f_s \colon M \to N$, dada por $f_s(x) = F(x, s)$, temos que*

$$\{s \in S \mid f_s \pitchfork Q\}$$

tem complementar com medida nula em $\mathbb{R}^k$.

Demonstração. Defina $P \colon M \times S \to S$ por $P(x, s) = s$ e $i_s \colon M \times \{s\} \to M \times S$ por $i_s(x, s) = (x, s)$. Portanto, $f_s = F \circ i_s$. Por fim, observe que $f_s \pitchfork Q$ se, e somenste se, $i_s \pitchfork F^{-1}(Q)$ (veja Exercício 1 da lista) e, $i_s \pitchfork F^{-1}(Q)$ (ou seja, $M \times \{s\} \pitchfork F^{-1}(Q)$) se, e somente se, s é um valor regular de $P_{|F^{-1}(Q)} \colon F^{-1}(Q) \to S$. donde segue o resultado.

$\square$

Abaixo, segue uma aplicação imediata do Lema de Transversalidade acima.

Proposição 0.3 (Resultado de Genericidade). *Sejam M e $Q \subset \mathbb{R}^n$ suaves e seja $f \colon M \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Dado $\epsilon > 0$, existe uma aplicação suave $\tilde{f} \colon M \to \mathbb{R}^n$ transversal a Q e tal que $\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \epsilon$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $F \colon M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x, s) = f(x) + s$. Desde que F úma submersão, temos que $F \pitchfork Q$ e, pelo Lema de Trasversalidade, $\{s \in \mathbb{R}^n \ : \ f_s \pitchfork Q\}$ é denso em $\mathbb{R}^n$. Portanto, existe $\|s\| < \epsilon$, isto é $\|f(x) - f_s(x)\| < \epsilon$, tal que $f_s \pitchfork Q$. $\square$

Para finalizar, destacamos o seguinte resultado de estabilidade.

Proposição 0.4 (Resultado de Estabilidade). *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ e $Q \subset \mathbb{R}^q$ suaves. Suponha M compacta e $Q \subset \mathbb{R}^q$ fechada como subconjunto. Seja $S \subset \mathbb{R}^k$ um subconjunto aberto. Se $F \colon M \times S \to \mathbb{R}^q$ é uma aplicação suave, e $f_s \colon M \to N$ dada por $f_s(x) = F(x, s)$, satisfaz $f_{s_0} \pitchfork Q$ para algum $s_0 \in S$, então existe uma vizinhança B de s_0 em S tal que $f_s \pitchfork Q$ para todo $s \in B$.*

Lista de exercícios 03

1) Sejam M e N suaves. $Q \subset N$ subvariedade e $f\colon M \to N$ aplic. suave tal que $f \pitchfork Q$. Se R é suave e $g\colon R \to M$ é aplic. suave, então

$$g \pitchfork f^{-1}(Q) \iff f \circ g \pitchfork Q.$$

2) Um Teorema de Análise afirma que qualquer subconjunto fechado $K \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como os zeros de alguma função suave $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Considerando $\mathbb{R}^n$ mergulhado em $\mathbb{R}^{n+1}$, pondo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, use o teorema citado para mostrar que todo subconjunto fechado $K \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma interseção $M \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}$ em que $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade suave.

3) Mostre que as esferas $\mathbb{S}^n$ com $n \geq 2$ são simplesmente conexas.

4) Seja $M \subset \mathbb{R}^q$ (fechado como subconjunto) suave de dimensão m. Mostre que: se $m + 1 < q$, então $\mathbb{R}^q \setminus M$ é conexo.

5) Seja $M \subset \mathbb{R}^q$ (fechado como subconjunto) suave de dimensão m. Mostre que: se $m + 2 < q$, então $\mathbb{R}^q \setminus M$ é simplesmente conexo.