

Topologia Diferencial

Alexandre Fernandes

11 de janeiro 2018

Conjuntos suaves com bordo

Notações. $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \leq 0\}$ e $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$.

Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ é dito *suave com bordo* ou *∂ -suave de dimensão m* se, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança aberta U de x em M difeomorfa a um aberto V de $\mathbb{H}^m$ (o difeomorfismo $\varphi: V \rightarrow U$ é dito uma *parametrização local de M* em torno de p).

O *bordo de M* , denotado por ∂M , é constituído por todos os pontos de M que são imagens de pontos de $\mathbb{R}^{m-1} \times 0 \subset \mathbb{H}^m$ via parametrizações locais.

Observação. Como consequência imediata da proposição a seguir, vemos que um ponto de M está em seu bordo se, e somente se, esse ponto é imagem de um ponto de $\mathbb{R}^{m-1} \times 0 \subset \mathbb{H}^m$ para qualquer que seja a parametrização local de M em torno do ponto.

Proposição 0.1. *Se f é um difeomorfismo entre abertos A e B de $\mathbb{H}^m$, então*

$$p \in A \cap \mathbb{R}^{m-1} \times 0 \Leftrightarrow q = f(p) \in \mathbb{R}^{m-1} \times 0.$$

Demonstração. Dado um subconjunto X aberto de $\mathbb{H}^m$, para cada ponto $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$ temos o seguinte

$$T_x X = \mathbb{R}^m \text{ se } x_m > 0 \quad \text{e} \quad T_x X = \mathbb{R}^{m-1} \times 0 \text{ se } x_m = 0.$$

Em particular, temos que $T_x X$ sempre será um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e satisfazendo: $T_x X = \mathbb{R}^m$ se, e somente se, $x \notin X \cap \mathbb{R}^{m-1} \times 0$.

Por outro lado, já vimos que, se $f: A \rightarrow B$ é um difeomorfismo com inversa $g: B \rightarrow A$, então temos aplicações lineares $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\tilde{S}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que $S(T_p A) = T_q B$ e $\tilde{S}(T_q B) = T_p A$, a saber, $S = d_p f$ e $\tilde{S} = d_q g$. Logo, fica provada a proposição. $\square$

Corolário 0.2. *Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ um ∂ -suave de dimensão m . Seja $x \in \partial M$. Para qualquer parametrização local de M $\psi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ tal que $x \in \tilde{U}$, tem-se que $\psi^{-1}(x) \in \tilde{V} \cap \mathbb{R}^{m-1} \times 0$.*

Proposição 0.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^k$ aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. se $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular (não-trivial) de f , então*

$$\{x \in U \mid f(x) \leq a\}$$

é ∂ -suave de dimensão k e bordo igual a $f^{-1}(a)$.

Exemplos

1. Bola fechada em $\mathbb{R}^n$ (via a função $x \mapsto |x|^2$).
2. Faixas $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ (via a função $(t, x) \mapsto t^2 - t$).

Proposição 0.4. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^q$ suave de dimensão k e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. se $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular (não-trivial) de f , então*

$$\{x \in M \mid f(x) \leq a\}$$

é ∂ -suave de dimensão k e bordo igual a $f^{-1}(a)$.

Exemplo.

- 3 Hemisférios fechados de $\mathbb{S}^n$ são suaves com bordo igual a equadores (via a função $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto x_i$)
- 4 Dado $M \subset \mathbb{R}^q$ suave de dimensão k , o cilindro $[0, 1] \times M$ é ∂ -suave de dimensão $k+1$ e bordo igual a $0 \times M \cup 1 \times M$ (via a função $(t, x) \mapsto t^2 - t$).

Proposição 0.5 (Outra máquina de exemplos). *Sejam M suave de dimensão m e N uma ∂ -variedade de dimensão n . Então, $M \times N$ é ∂ -suave de dimensão $m+n$ e bordo igual a $M \times \partial N$.*

Espaços tangentes a conjuntos ∂ -suaves

Neste contexto, usaremos, também, um conceito mais geral de espaço tangente o qual está descrito abaixo.

Espaços tangentes generalizados. Dados $X \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in X$, definimos o *espaço tangente generalizado* de X em x por

$$\mathcal{T}_x X = \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^m \mid \gamma: (-\epsilon, 0] \rightarrow X \text{ ou } \gamma: [0, \epsilon) \rightarrow X; \gamma(0) = x\}.$$

Exemplos.

1. Se $A \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, então $\mathcal{T}_a A = \mathbb{R}^m$ para todo $a \in A$.
2. Se X é subconjunto aberto de $\mathbb{H}^m$, então, para cada ponto $x \in X$, $\mathcal{T}_x X = \mathbb{R}^m$.
3. Se $M \subset \mathbb{R}^m$ é suave, então $\mathcal{T}_p M = T_p M$ para todo $p \in M$.

De posse do conceito de espaços tangentes generalizados, claramente, podemos ampliar o domínio das derivadas de aplicações suaves entre subconjuntos de espaços euclidianos $f: X \rightarrow Y$ para $d_x f: \mathcal{T}_x X \rightarrow \mathcal{T}_{f(x)} Y$. Assim, de forma natural, recebemos o seguinte resultado.

Proposição 0.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ subconjuntos. Seja $f: X \rightarrow Y$ um difeomorfismo com inversa $g: Y \rightarrow X$. Dados $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y = f(x)$ e $x = g(y)$, tem-se que $d_x f(\mathcal{T}_x X) = \mathcal{T}_y Y$ e $d_y g(\mathcal{T}_y Y) = \mathcal{T}_x X$.*

Proposição 0.7. *Sejam M e N ∂ -suaves. Se $f: M \rightarrow N$ é difeomorfismo, então $f(\partial M) = \partial N$ e $\mathcal{T}_x M \rightarrow \mathcal{T}_{f(x)} N$ é isomorfismo para todo $x \in N$.*

Proposição 0.8. *Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ ∂ -suave de dimensão m . Para todo $x \in M$, tem-se que $\mathcal{T}_x M$ é um subespaço vetorial m -dimensional de $\mathbb{R}^k$. Além disso, $T_x M$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{T}_x M$ e, $T_x M = \mathcal{T}_x M$ se, e somente se, $x \notin \partial M$.*

Observações

1. Se M é ∂ -suave de dimensão m , então ∂M é uma suave de dimensão $m + 1$.
2. Se M e N são difeomorfos, então M é ∂ -suave se, e somente se, N o é.

Para finalizar, destacamos a mais geral das máquinas de exemplos de ∂ -variedades aqui apresentadas.

Teorema 0.9. *Sejam M ∂ -suave de dimensão m , N suave de dimensão n e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Se $y \in N$ é um valor regular não-trivial de f , então $f^{-1}(y)$ é uma ∂ -variedade de dimensão $m - n$ e bordo igual a $f^{-1} \cap \partial M$.*

Lista de exercícios 04

- 1) Mostre que $[0, 1] \times [0, 1]$ não é ∂ -suave.
- 2) Seja M ∂ -suave. Mostre que existe uma função suave e não-negativa $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 é valor regular de f e $\partial M = f^{-1}(0)$. (Veja o Teorema de Partição da Unidade no Livro-Texto página 52).
- 3) Seja M ∂ -suave. Mostre que ∂M é um subconjunto fechado de M .
- 4) Sejam M ∂ -suave, N suave n -dimensional e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Mostre que o complementar do subconjunto de N formado pelos pontos que são simultaneamente valores regulares de f e $f|_{\partial M}$ possui medida n -dimensional nula.
- 5) Sejam M e N ∂ -suaves e $f: M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Mostre que $p \in \partial M$ se, e somente se, $f(p) \in \partial N$.