

Topologia DiferencialI

Alexandre Fernandes

17 de janeiro de 2018

Grau de Brower módulo 2

Antes de iniciarmos a exposição da teoria do grau de Brower mod 2, destacamos dois resultados que são muito importantes para a fundamentação desta exposição.

Teorema 0.1 (Teorema da vizinhança tubular). *Seja $N \subset \mathbb{R}^q$ suave. Então, existem uma função suave e positiva $\epsilon: N \rightarrow \mathbb{R}$ e uma submersão suave $\pi: N^\epsilon \rightarrow N$; $\pi(y) = y$ para todo $y \in N$, onde*

$$N^\epsilon = \{z \in \mathbb{R}^q \mid \|z - y\| < \epsilon(y) \text{ para algum } y \in N\}.$$

Teorema 0.2 (Lema de homogeneidade). *Seja $N \subset \mathbb{R}^q$ suave e conex. Dados $y_1, y_2 \in N$, existe um difeomorfismo $T: N \rightarrow N$, isotópico à identidade, tal que $T(y_1) = y_2$*

Sejam M e N suaves, de mesma dimensão, M compacto e N conexo. Dada uma aplicação suave $f: M \rightarrow N$, para cada valor regular $y \in N$ de f , definimos o **grau módulo 2 de f em y** por

$$\deg_2(f, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } \#f^{-1}(y) \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } \#f^{-1}(y) \text{ é par} \end{cases}$$

Proposição 0.3. *Nas condições acima, $\deg_2(f, y)$ independe do valor regular $y \in N$ escolhido.*

Demonstração. Fazer. □

Proposição 0.4. *Sejam M e N nas condições descritas acima. Sejam $f, g: M \rightarrow N$ aplicações suavemente homotópicas e $y \in N$ valor regular simultâneo de f e g . Então $\deg_2(f, y) = \deg_2(g, y)$.*

Proposição 0.5. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ variedades suaves, de mesma dimensão, M compacta e N conexa. Sejam $f: M \rightarrow N$ aplicação suave. Dados, $y_1, y_2 \in N$ valores regulares de f , tem-se que $\deg_2(f, y_1) = \deg_2(f, y_2)$.*

Fundamentado na última proposição, o número $\deg_2(f, y)$ não depende do valor regular escolhido; esse número é chamado de o **grau módulo 2 de f** e denotado por $\deg_2(f)$. Dessa forma, penúltima proposição acima diz que o grau módulo 2 é invariante por homotopias suaves.

Grau módulo 2 de aplicações contínuas

Sejam M e $N \subset \mathbb{R}^q$ suaves, de mesma dimensão, M compacto e N conexo. Dada uma aplicação contínua $f: M \rightarrow N$, mostra-se que existe $\delta > 0$ tal que:

1. para quaisquer duas aplicações suaves $f_1, f_2: M \rightarrow N$ tais que $\|f_i(x) - f(x)\| < \delta$ para todo $x \in M$ ($i = 1, 2$), tem-se que f_1 e f_2 são suavemente homotópicas;
2. existe $f_\infty: M \rightarrow N$ suave tal que $\|f_\infty(x) - f(x)\| < \delta$ para todo $x \in M$.

Assim, definimos o **grau módulo 2 de f** , denotado por $\deg_2(f)$, por: $\deg_2(f) := \deg_2(f_\infty)$ para qualquer aplicação suave $f_\infty: M \rightarrow N$ que satisfaça o item 2 acima.

Teorema 0.6. *Sejam M e N suaves, de mesma dimensão, M compacto e N conexo. Sejam $f, g: M \rightarrow N$ aplicações contínuas. Se f e g são continuamente homotópicas, então $\deg_2(f) = \deg_2(g)$.*

Lista de exercícios 5

1) Sejam M e N e R suaves, de mesma dimensão, M, N compactos e N, R conexos. Sejam $f, : M \rightarrow N, g: N \rightarrow R$ aplicações contínuas. Mostre que

$$\deg_2(g \circ f) = \deg_2(g) \cdot \deg_2(f).$$

2) Sejam M e N variedades suaves, de mesma dimensão, compactos e conexos. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação contínua com $\deg_2(f) = 1$. Mostre que f é sobrejetiva.

3) Mostre que homotopia suave define uma relação de equivalência no conjunto das aplicações suaves $M \rightarrow N$.

4) Seja $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma aplicação contínua tal que $\deg_2(f) = 0$. Mostre que f tem um ponto fixo.

5) Prove que nenhum conjunto suave compacta (conexa) é continuamente contrátil.