Topologia Diferencial

Alexandre Fernandes

23 de janeiro de 2018

Orientação em Espaços vetoriais

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Denote por $B_o(V)$ o conjunto das bases ordenadas de V. Dadas duas bases em $B_o(V)$, β_1 e β_2, dizemos que β_1 é *equivalente* a β_2 se a matriz de mudança de coordenadas de β_1 para β_2 tem determinante positivo. É fácil ver que a relação definida acima é uma relação de equivalência que define exatamente duas classes de eqivalência em $B_o(V)$. Cada uma dessas classes de equivalência é dita uma *orientação* em V. Dada uma orientação θ de V, denotamos a outra orientação de V por $-\theta$. Dado um esp. vet. com uma orientação θ fixada, dizemos que o par (V, θ) é um *espaço vetorial orientado.* Em um esp. vet. orientado (V, θ), as bases que estão em θ são ditas *positivas* e as que não estão são ditas *negativas.* Salvo menção em contrário, consideraremos $\mathbb{R}^n$ equipado com a orientação que contém a base canônica. Dados (V_1, θ_1) e (V_2, θ_2) esp. vet. orientados, dizemos que um isomorfismo linear $T\colon V_1 \to V_2$ é *positivo* (respectivamente *negativo*) quando T envia bases positivas em bases positivas (respect negativas).

Obs. Para verificar se um isomorfismo é positivo (ou negativo) é suficiente escolher uma base positiva e verificar o sinal da respectiva base imagem por T. Se a base imagem for positiva, então T é positivo, caso contrário, T é negativo.

Obs. Um isomorfismo $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é positivo se, e somente se, a sua matriz na base canônica tem determinante positivo.

Orientação em conjuntos suaves

Seja M suave de dimensão m. Uma *orientação* em M é uma aplicação $x \in M \mapsto \theta_x$ orientação em T_xM que varia continuamente com x, isto é, tal que: para cada $x \in M$ existe um sistema de coordenadas locais $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ em torno de x e tal que $d_z\varphi\colon T_zM \to \mathbb{R}^m$ é positivo para todo $z \in U$.

- Uma coleção $\{(U,\varphi)\}$ do tipo descrito acima é dita um *atlas de cartas positivas* de M. .

- Uma conjunto suave que admite uma orientação é dito *orientável.*

- Uma conjunto suave com uma orientação fixada é dito *uma variedade orientado.*

Exemplo. Abertos de $\mathbb{R}^n$ são suaves orientáveis.

Obs. Sejam M um n-dimensional conjunto suave orientado e $\{(U_i,\varphi_i)\}$ um atlas de cartas positivas. Nesse caso, tem-se que: para todo $x \in U_i \cap U_j$, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é um difeomorfismo entre os abertos de $\mathbb{R}^n$ $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ tal que $d_z(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ é positivo para todo $z \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$, ou seja, o determinante jacobiano de $d_z(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ é positivo para todo $z \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Sejam M um conjunto n-dimensional suave e $\{(U_i,\varphi_i)\}$ uma cobertura de M por sistemas de coordenadas locais. Dizemos que a coleção $\{(U_i,\varphi_i)\}$ é um *atlas coerente* se $d_z(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ é positivo para todo $z \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Proposição 0.1. *Seja M suave. Se M admite um atlas coerente, então M é orientável.*

Sejam M e N suaves orientados de mesma dimensão. Um difeomorfismo local $f\colon M \to N$ é dito *positivo* (respect. *negativo*) se $d_x f\colon T_xM \to T_xN$ é positivo (respect. negativo) para todo $x \in M$.

Proposição 0.2. *O subconjunto*

$$\{x \in M \mid d_x f\colon T_xM \to T_xN \text{ é positivo (negativo)}$$

é um aberto de M.

Seguem algumas consequências imediatas da proposição acima.

- Se M é conexo, então todo difeo local $M \to N$ é positivo ou negativo.

- Todo sist. de coord. locais de M é positivo ou negativo.

- Em cada conjunto suave e conexo, há no máximo duas orientações.

Exemplo. O cilindro $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é orientável porque é difeomorfo ao aberto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 0.3. *Sejam M e N suaves. Então, $M \times N$ é orientável se, somente se, M e N são orientáveis*

Exemplo. Já vimos que o cilindro $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é orientável e, pelo resultado acima, segue que $\mathbb{S}^n$ é orientável. Abaixo, segue uma forma efetiva de orientar $\mathbb{S}^n$.

Demonstração. Orientamos o cilindro $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ pedindo que o difeomorfismo $f\colon \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, dado por $f(x,t) = e^t \cdot x$, seja positivo. Agora, orientamos $\mathbb{S}^n$ seguindo a prova da proposição acima, ou seja, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base positiva de $T_x\mathbb{S}^n$ se, e somente se, $\{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, 1)\}$ é base positiva de $T(x, 0)\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Agora, como $d_{(x,0)}f(v_i, 0) = v_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e $d_{(x,0)}f(0, 1) = x$, segue que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base positiva de $T_x\mathbb{S}^n$ se, e somente se, $\{v_1, \ldots, v_n, x\}$ é base positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\det(v_1, \ldots, v_n, x) > 0$. $\square$

Exemplo. A aplicação antípoda $\alpha\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, dada por $\alpha(x) = -x$, é um difeomorfismo. Assumindo $\mathbb{S}^n$ orientada como acima, vemos que α é positivo se, e somente se, n é ímpar.

Exemplo. Consideremos o seguinte modelo do plano projetivo em $\mathbb{R}^4$. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Definimos $\mathbb{R}P^2 = F(\mathbb{S}^2)$. Assim, vemos que $\mathbb{R}P^2$ é suave de dimensão 2 e a restrição de F à esfera $\mathbb{S}^2$ define um difeomorfismo local $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ tal que

$$f(p) = f(q) \Leftrightarrow p = \pm q.$$

(Veja Elon Lima, Curso de Análise Vol 2, pag 326 Ed 4.) Consideremos a aplicação antípoda $\alpha\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$. Pela observação acima, $f \circ \alpha = f$, daí $d_xf = d_{-x}f \cdot d_x\alpha$ e, como α é negativo, $\mathbb{R}P^2$ não pode ser orientável,

Lista de exercícios 7

1) Sejam M e N suaves de mesma dimensão. Suponha que exista um difeomorfismo local $f\colon M \to N$. Mostre que: se N é orientável, então M também é orientável.

2) Sejam M e N suaves de mesma dimensão com M é conexa e está orientada. Suponha que exista um difeomorfismo local e sobrejetor $f\colon M \to N$. Mostre que: se $[d_y f]^{-1} \cdot d_x f\colon T_xM \to T_yM$ é um isomorfismo positivo para quaisquer $x, y \in M$ com $f(x) = f(y)$, então N é orientável.

3) Suponha que exista um conjunto suave $\mathbb{P}^m$, de dimensão m, com a seguinte propriedade: existe um difeomorfismo local e sobrejetor $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{P}^m$ tal que $f(p) = f(q)$ se, e somente se, $p = q$ ou $p = -q$. Mostre que $\mathbb{P}^m$ é orientável se, e somente se, m é um número ímpar.

4) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ suave de codimensão 1 em $\mathbb{R}^n$. Mostre que M é orientável se, e somente se, existe um campo contínuo de vetores $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ normal a M (v(x) perpendicular a T_xM $\forall\ x \in M$) e que nunca se anula.

5) Seja M suave e orientável. Mostre que todo subconjunto suave de M, obtido como imagem inversa de um valor regular de uma função suave $M \to \mathbb{R}$, é orientável.