Topologia Diferencial

Alexandre Fernandes

24 de janeiro de 2018

Orientação de variedades com bordo

Notações. $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \leq 0\}$ e $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$.

Lembramos que, no contexto de conjuntos suaves com bordo, além dos espaços tangentes, trabalhamos também com os espaços tangentes generalizados

$$\mathcal{T}_x X = \{\gamma'(0) \in \mathbb{R}^m \mid \gamma\colon (-\epsilon, 0] \to X \text{ ou } \gamma\colon [0, \epsilon) \to X;\ \gamma(0) = x\}.$$

Ressaltamos que, quando $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma ∂-variedade de dimensão m, $\mathcal{T}_x M$ é um espaço vetorial de dimensão m, $\forall\ x \in M$.

Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ ∂-suave de dimensão m. Uma *orientação* em M é uma aplicação $x \in M \mapsto \theta_x$ orientação em $\mathcal{T}_x M$ que varia continuamente com x, isto é, tal que: para cada $x \in M$ existe um sistema de coordenadas locais $\varphi\colon U \to \mathbb{H}^m$ em torno de x e tal que $d_z\varphi\colon T_z M \to \mathbb{R}^m$ é positivo para todo $z \in U$.

- Uma coleção $\{(U, \varphi)\}$ do tipo descrito acima é dita um *atlas de cartas positivas* de M. .
- Um conjunto ∂-suave que admite uma orientação é dito *orientável.*
- Uma conjunto ∂-suave com uma orientação fixada é dito *orientado.*

Exemplo. Abertos de $\mathbb{H}^m$ que intersectam $\partial\mathbb{H}^m$ são ∂-suaves orientáveis.

Proposição 0.1. *Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ uma ∂-suave de dimensão m. Existe um campo de vetores $\eta\colon \partial M \to \mathbb{R}^k$ suave tal que: para todo $x \in M$*

- *$\eta(x) \in \mathcal{T}_x M$;*

- *$\eta(x) \perp T_x\partial M$;*
- *$\eta(x)$ tem comprimento unitário e aponta para fora de M.*

Proposição 0.2. *Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ uma ∂-variedade. Se M é orientável, então ∂M o é.*

Orientação correta do bordo

Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ ∂-suave orientado. Consideramos ∂M orientado com a orientação induzida de M conforme a prova da proposição anterior, isto é, para cada $x \in \partial M$, $\eta(x)$ denota o vetor de comprimento unitário em $\mathcal{T}_x M$ que é perpendicular a $T_x\partial M$ e aponta para fora de M. Assim,

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ é base positiva de $T_x\partial M$ se, e somente se, $\{v_1, \ldots, v_m, \eta(x)\}$ é base positiva de $\mathcal{T}_x M$.

Exemplo. Discussão sobre orientação do cilindro $M \times [0, 1]$, quando M é variedade suave orientada.