10. EDOs Lineares de Segunda Ordem e Coeficientes Constantes III

Prof. Antonio Caminha*

26 de Abril de 2022

Nesta aula, estudaremos como resolver a EDO

$$y'' + ay' + by = r(x), \tag{1}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $r : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ um intervalo) é uma função contínua dada. Nesse sentido, diremos que

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{2}$$

é a **EDO linear homogênea** associada a (1). (O nome *homogênea* se refere ao fato do segundo membro de (2) ser 0.)

Se $y_p : I \to \mathbb{R}$ é uma solução particular de (1) e $y_h : I \to \mathbb{R}$ é uma solução de (2), então $y := y_p + y_h$ também resolve (1). De fato,

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (y_p + y_h)'' + a(y_p + y_h)' + b(y_p + y_h) \\ &= (y_p'' + y_h'') + a(y_p' + y_h') + b(y_p + y_h) \\ &= (y_p'' + ay_p' + by_p) + (y_h'' + ay_h' + by_h) \\ &= r(x) + 0 = r(x). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $y : I \to \mathbb{R}$ é outra solução de (1), então um cálculo essencialmente análogo ao que fizemos acima garante que $y_h := y - y_p$ é solução de (2).

Como já sabemos resolver (2), o argumento do parágrafo anterior garante que, a fim de resolver (1), é suficiente encontrar uma solução particular dessa equação. Para fazer isso, utilizaremos um método denominado **variação de parâmetros**, o qual lembra o método de busca por fatores integrantes, que usamos para transformar EDOs de primeira ordem não exatas em EDOs exatas.

Comecemos recordando que toda solução de (2) pode ser escrita como combinação linear das funções $v_1 = u_1 e^{-ax/2}$ e $v_2 = u_2 e^{-ax/2}$, em que $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as soluções especiais que construímos para $u'' - \frac{\Delta}{4}u = 0$, em que $\Delta = a^2 - 4b$.

Procuremos funções $l_1, l_2 : I \to \mathbb{R}$ tais que

$$y_p := l_1 v_1 + l_2 v_2 : I \to \mathbb{R}$$

resolva (1). (As funções l_1 e l_2 variam as funções v_1 e v_2 que *parametrizam* as soluções de (2); daí vem o nome do método.) Então, queremos que

$$\begin{aligned}
r(x) &= y_p'' + a y_p' + b y_p \\
&= (l_1 v_1 + l_2 v_2)'' + a(l_1 v_1 + l_2 v_2)' + b(l_1 v_1 + l_2 v_2) \\
&= (l_1'' v_1 + 2 l_1' v_1' + l_1 v_1'') + (l_2'' v_2 + 2 l_2' v_2' + l_2 v_2'') + \\
&\quad + a(l_1' v_1 + l_1 v_1') + a(l_2' v_2 + l_2 v_2') + b(l_1 v_1 + l_2 v_2) \\
&= (\underbrace{l_1'' v_1 + l_1' v_1' + l_2'' v_2 + l_2' v_2'}_{=(l_1' v_1 + l_2' v_2)'}) + (l_1' v_1' + l_2' v_2') + \\
&\quad + a(l_1' v_1 + l_2' v_2) + l_1(\underbrace{v_1'' + a v_1' + b v_1}_{=0}) + l_2(\underbrace{v_2'' + a v_2' + b v_2}_{=0}) \\
&= (l_1' v_1 + l_2' v_2)' + (l_1' v_1' + l_2' v_2') + a(l_1' v_1 + l_2' v_2).
\end{aligned}$$

Para tanto, vejamos *se é possível* encontrar funções l_1 e l_2 tais que

$$\begin{cases} l_1'v_1 + l_2'v_2 = 0 \\ l_1'v_1' + l_2'v_2' = r(x) \end{cases}. \tag{3}$$

Uma vez feito isso, os cálculos acima mostram que $y_p := l_1v_1 + l_2v_2$ realmente será uma solução particular de (1).

Para cada $x \in I$, podemos ver (3) como um sistema linear em $l_1'(x)$ e $l_2'(x)$. Então, a teoria dos sistemas lineares garante que conseguiremos encontrar $l_1'(x)$ e $l_2'(x)$ para todo $x \in I$ se, e só se, o determinante

$$W(x) := \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \tag{4}$$

for não nulo para todo $x \in I$. Tal determinante é o **wronskiano**[1] associado a (3), e note que ele está definido para todo $x \in \mathbb{R}$.

Admitindo por um momento que $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, teremos pela regra de Cramer que

$$l_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ r & v_2' \end{vmatrix} = -\frac{rv_2}{W} \quad \text{e} \quad l_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & r \end{vmatrix} = \frac{rv_1}{W},$$

logo,

$$l_1(x) = -\int \frac{rv_2}{W}(x)dx \quad \text{e} \quad l_2(x) = \int \frac{rv_1}{W}(x)dx. \tag{5}$$

Resta mostrarmos que $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Faremos isto no lema a seguir, mostrando que, de fato, $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lema 1. *Nas notações da discussão acima, temos $W(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

[1] Em homenagem ao matemático polonês Józef Maria Hoene-Wroński (1776-1853).

$$\Big(\underbrace{v_1 \cdot v_2' - v_1' \cdot v_2}_{W}\Big)' = \cancel{v_1' \cdot v_2'} + v_1 \cdot v_2'' - v_1'' \cdot v_2 - \cancel{v_1' \cdot v_2'}$$

Prova. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned}
W' &= \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} v_1' & v_2' \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}}}_{=0} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1'' & v_2'' \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{por (2)}}{=} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ -av_1' - bv_1 & -av_2' - bv_2 \end{vmatrix} \\
&= -a\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} - b\underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}}_{=0} \\
&= -aW.
\end{aligned}$$

$v_1' v_2' - v$

Sendo $W' + aW = 0$, temos

$$W(x) = W(0)e^{-ax}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, basta mostrarmos que $W(0) \neq 0$. Lembrando que $v_j = u_j e^{-ax/2}$, temos $v_j(0) = u_j(0)$ e $v_j'(0) = u_j'(0) - \frac{a}{2}u_j(0)$ para $j = 1, 2$, de sorte que

$$\begin{aligned}
W(0) &= \begin{vmatrix} v_1(0) & v_2(0) \\ v_1'(0) & v_2'(0) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) - \frac{a}{2}u_1(0) & u_2'(0) - \frac{a}{2}u_2(0) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} - \frac{a}{2}\begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(0) & u_2(0) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Analisemos separadamente os casos $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$:

(i) $\Delta < 0$: como $u_1(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right)$ e $u_2(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right)$, temos

$$W(0) = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \cdot 0 & \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \cdot 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \neq 0.$$

(ii) $\Delta = 0$: como $u_1(x) = 1$ e $u_2(x) = x$, temos

$$W(0) = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

(iii) $\Delta > 0$: como $u_1(x) = e^{\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}}$ e $u_2(x) = e^{-\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}}$, temos

$$W(0) = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2} & -\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{\Delta} \neq 0.$$

$\square$

A discussão acima mostrou que o método de variação dos parâmetros sempre fornece uma solução particular de (1), contanto que saibamos calcular as integrais indefinidas em (5).

Contudo, a fim de aplicar o método a exemplos práticos, em vez de tentar gravar as fórmulas em(5) é mais conveniente reproduzir parcialmente sua dedução. Vejamos um exemplo nesse sentido.

Exemplo 2. *Resolva a EDO $y'' + 4y = \operatorname{tg} x$ no intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, sujeita às condições iniciais $y(\pi) = \pi$ e $y'(\pi) = -1$.*

Solução. A solução geral da equação homogênea $y'' + 4y = 0$ é

$$y_h = c_1 v_1 + c_2 v_2, \quad \text{com} \quad v_1 = \cos(2x), v_2 = \operatorname{sen}(2x).$$

(Como $a = 0$ nesse caso, temos $v_j = u_j$ para $j = 1, 2$.) Então, fazendo $y_p = l_1 v_1 + l_2 v_2$, temos

$$y_p'' + 4y_p = \ldots = (l_1' v_1 + l_2' v_2)' + (l_1' v_1' + l_2' v_2'),$$

e basta impor que

$$\begin{cases} l_1' v_1 + l_2' v_2 = 0 \\ l_1' v_1' + l_2' v_2' = \operatorname{tg} x \end{cases}.$$

Agora,

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \operatorname{sen}(2x) \\ -2\operatorname{sen}(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2,$$

de sorte que

$$l_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ \operatorname{tg} x & v_2' \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}v_2 \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{tg} x = -\operatorname{sen}^2 x$$

e

$$\begin{aligned} l_2' &= \frac{1}{W}\begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}v_1 \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\cos(2x)\operatorname{tg} x \\ &= \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1)\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\cdot 2\cos x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} l_1(x) &= -\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(\cos(2x) - 1)dx \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} l_2(x) &= \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right) dx \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\log(-\cos x) \end{aligned}$$

(lembrando que $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ implica $\cos x < 0$).

Segue finalmente que

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1\cos(2x) + c_2\operatorname{sen}(2x) + \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \frac{x}{2}\right)\cos(2x) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\log(-\cos x)\right)\operatorname{sen}(2x), \end{aligned}$$

e as condições iniciais dão (verifique!)

$$y(\pi) = \pi \Leftrightarrow c_1 - \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow c_1 = \frac{3\pi}{2},$$
$$y'(\pi) = -1 \Leftrightarrow 2c_2 - \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{4}.$$

□

Por vezes, a expressão para $r(x)$ dá uma pista sobre a forma de uma solução particular de (1). Vejamos um exemplo (para outros, consulte a seção 18 do livro-texto).

Exemplo 3. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, ache uma solução particular para (1) no caso em que $r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$.*

Solução. A ideia é procurar uma solução particular y_p que também seja um polinômio.

Se $a = b = 0$, então (1) se reduz a $y_p'' = r(x)$, e basta antiderivar o polinômio r duas vezes. Para os demais casos, o raciocínio que exporemos a seguir funciona para quaisquer valores do grau n de r e dos coeficientes a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0. Contudo, a fim de simplificar e dar uma ideia melhor dos cálculos envolvidos, vamos supor que

$$r(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 7.$$

Consideremos separadamente os casos (i) $b \neq 0$ e (ii) $b = 0$, $a \neq 0$:

(i) Se $b \neq 0$ e y_p for um polinômio de grau m, então y_p'', y_p' e y_p são polinômios de graus $m-2$, $m-1$ e m, respectivamente. Como $b \neq 0$, temos que $y_p'' + ay_p' + by_p$ é um polinômio de grau m; então, para que haja alguma chance dele ser igual a r (que tem grau 3), devemos tomar $m = 3$. Faça, pois, $y_p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ e suponhamos, para ilustrar os cálculos em um caso concreto, que $b = 1$ e $a = 3$ (o caso geral é totalmente análogo). Temos

$$
\begin{aligned}
& y_p'' + 3y_p' + y_p = r(x) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)'' + 3(c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)' + \\
& \quad + (c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0) \\
& = 2x^3 - x^2 + 5x + 7 \\
& \Leftrightarrow c_3x^3 + (c_2 + 9c_3)x^2 + (c_1 + 6c_2 + 6c_3)x + (c_0 + 3c_1 + 2c_2) = \\
& = 2x^3 - x^2 + 5x + 7.
\end{aligned}
$$

Comparando coeficientes de monômios de mesmos graus, obtemos o sistema linear de equações

$$
\begin{cases}
c_3 = 2 \\
c_2 + 9c_3 = -1 \\
c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 5 \\
c_0 + 3c_1 + 2c_2 = 7
\end{cases}.
$$

Substituindo o valor de c_3 na segunda equação calculamos c_2; em seguida, substituindo os valores de c_2 e c_3 na terceira equação calculamos c_1, etc. Assim fazendo, obtemos $c_3 = 2$, $c_2 = -19$, $c_1 = 107$, $c_0 = -276$ e

$$y_p(x) = 2x^3 - 19x^2 + 107x - 276.$$

(ii) Se $b = 0$, $a \neq 0$ e y_p for um polinômio de grau m, então y_p'' e y_p' são polinômios de graus $m - 2$ e $m - 1$, respectivamente. Como $a \neq 0$, temos que $y_p'' + ay_p'$ é um polinômio de grau $m - 1$; então, para que haja alguma chance dele ser igual a r (que tem grau 3), devemos tomar $m - 1 = 3$, isto é, $m = 4$. Faça, pois,

$y_p(x) = c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ e suponhamos, para ilustrar os cálculos em um caso concreto, que $a = 1$ (o caso geral é totalmente análogo). Temos

$$\begin{aligned}
&y_p'' + y_p' = r(x) \Leftrightarrow \\
&\ \Leftrightarrow (c_4x^4 + c_3x^3 + \ldots + c_0)'' + (c_4x^4 + c_3x^3 + \ldots + c_0)' = \\
&\ = 2x^3 - x^2 + 5x + 7 \\
&\ \Leftrightarrow 4c_4x^3 + (3c_3 + 12c_4)x^2 + (2c_2 + 6c_3)x + (c_1 + 2c_2) = \\
&\ = 2x^3 - x^2 + 5x + 7.
\end{aligned}$$

Comparando coeficientes de monômios de mesmos graus, obtemos o sistema linear de equações

$$\begin{cases} 4c_4 = 2 \\ 3c_3 + 12c_4 = -1 \\ 2c_2 + 6c_3 = 5 \\ c_1 + 2c_2 = 7 \end{cases}.$$

Procedendo como em (i), obtemos $c_4 = 1/2$, $c_3 = -7/3$, $c_2 = 19/2$, $c_1 = -12$. Como c_0 pode ser qualquer, tomando $c_0 = 0$ obtemos

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 12x.$$

□

Estudo & Problemas

1. No livro-texto, leia as seções 18, 19 e 20.
2. Na seção 18, faça os problemas 1 (itens (a), (b), (d)), 2 e 3.
3. Na seção 19, faça os problemas 1, 2, 3 e 5.

4. Sejam dados números reais a, b, c, d e funções deriváveis $r, s : I \to \mathbb{R}$ em que $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Explique como resolver o sistema de EDOs

$$\begin{cases} u' = au + bv + r(x) \\ v' = cu + dv + s(x) \end{cases}.$$

(Sug: comece derivando a primeira equação (porque isso é possível?). Em seguida, substitua a expressão para v', obtida a partir da segunda equação, seguida da expressão para v, obtida da primeira equação, para chegar a uma equação linear de segunda ordem e coeficientes constantes em u.)