

11. EDOs Lineares de Segunda Ordem e Coeficientes Constantes IV

Prof. Antonio Caminha*

28 de Abril de 2022

Hoje, vamos aplicar a teoria desenvolvida na aula anterior para estudar *oscilações forçadas* de um sistema massa-mola.

Uma vez mais, considere uma mola ideal com constante elástica $k > 0$ e massa desprezível, presa a uma parede por uma extremidade e a um bloco de massa m pela outra. Admita que o bloco repousa sobre o solo, que a mola está disposta horizontalmente e que o sistema massa-mola oscila ao longo da direção definida pela mola.

Suponha que, além da força elástica, *possivelmente* atua sobre o bloco (também nessa direção), uma força de amortecimento cuja intensidade é proporcional à velocidade do bloco. Suponha, ainda, que o corpo está sujeito a uma força excitadora externa, que atua na mesma direção das oscilações da mola com intensidade

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t),$$

com $F_0 > 0$, $\omega_0 > 0$. Nesse caso, dizemos que o sistema massa-mola está sujeito a uma oscilação **forçada** por $F(t)$.

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

Prof. Antonio Caminha

Como antes, queremos discutir a evolução temporal do movimento. Para tanto, sendo $x = x(t)$ a elongação da mola no instante t e $c \geq 0$ a constante de proporcionalidade da força de amortecimento, a Segunda Lei de Newton dá

$$mx'' = -kx - cx' + F(t),$$

de sorte que

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t). \quad (1)$$

Já sabemos que as soluções dessa equação são da forma $x = x_h + x_p$, onde x_h é a solução geral de

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

e x_p é uma solução particular de (1).

A fim de obter uma solução particular x_p , um “chute” razoável (devido à forma de $F(t)$) é procurá-la da forma

$$x_p(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad (2)$$

para certos $A, B \in \mathbb{R}$. (Tenha cuidado! Tais constantes A e B nada têm a ver com as constantes A e B que aparecem nas expressões para $x_h(t)$.)

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$\begin{aligned} -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + \frac{c}{m}(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)) \\ + \frac{k}{m}(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\left(-A\omega_0^2 + B \cdot \frac{c\omega_0}{m} + A \cdot \frac{k}{m} - \frac{F_0}{m} \right) \cos(\omega_0 t) +$$

Frequência da solução de
 $x'' - \frac{k}{m}x = 0$;
 Não confundir com a freq.
 da solução de
 $x'' - \frac{k}{m}x = 0$,
 que é:

$$+ \left(-B\omega_0^2 - A \cdot \frac{c\omega_0}{m} + B \cdot \frac{k}{m} \right) \text{sen}(\omega_0 t) = 0.$$

Uma vez que tal igualdade deve valer para todo $t \geq 0$, os coeficientes de $\cos(\omega_0 t)$ e $\text{sen}(\omega_0 t)$ devem anular-se. Então, escrevendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (lembre-se de que ω é a frequência natural da mola), obtemos o sistema linear de equações

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2)A + \frac{c\omega_0}{m} \cdot B = \frac{F_0}{m} \\ -\frac{c\omega_0}{m} \cdot A + (\omega^2 - \omega_0^2)B = 0 \end{cases}.$$

O determinante da matriz principal associada ao sistema acima é

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & \frac{c\omega_0}{m} \\ -\frac{c\omega_0}{m} & \omega^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix} = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2, \quad (3)$$

o qual é positivo se $\omega_0 \neq \omega$ ou $c > 0$.

Supondo, por enquanto, que estamos em um desses casos, segue da regra de Cramer que

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \frac{F_0}{m} & \frac{c\omega_0}{m} \\ 0 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2}$$

e

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & \frac{F_0}{m} \\ -\frac{c\omega_0}{m} & 0 \end{vmatrix}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{c\omega_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \left(\frac{F_0}{m} \right)^2 \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2}{\left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2 \right)^2} \\ &= \frac{(F_0/m)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m} \right)^2} > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Prof. Antonio Caminha

Portanto, escolhendo $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ de tal modo que

$$\cos \varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{e} \quad \sin \varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (5)$$

obtemos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sin(\omega_0 t) \right) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \sin \varphi_0 \sin(\omega_0 t)) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega_0 t - \varphi_0). \end{aligned}$$

Então, graças a (4), temos

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{c\omega_0}{m}\right)^2}} \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_0). \quad (6)$$

Agora, recordando que a EDO homogênea associada é

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0,$$

consideremos separadamente os casos (i) $c > 0$; (ii) $c = 0$ e $\omega_0 \neq \omega$.

(i) Se $c > 0$, sendo $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m}$ temos

$$x_h(t) = \begin{cases} C \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t + \varphi\right) e^{-\frac{c}{2m}t}, & \text{se } \Delta < 0 \\ (\tilde{A} + \tilde{B}t)e^{-\frac{c}{2m}t}, & \text{se } \Delta = 0 \\ \tilde{A}e^{\alpha_1 t} + \tilde{B}e^{\alpha_2 t}, & \text{se } \Delta > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

(Com $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ no caso $\Delta > 0$, uma vez que $\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{c}{m} < 0$ e $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{k}{m} > 0$.) Portanto, em qualquer caso, $x_h(t) \rightarrow 0$ exponencialmente quanto $t \rightarrow +\infty$, de sorte que

$$x(t) \cong x_p(t) \quad \text{para } t \gg 1.$$

Feito na aula 09

Prof. Antonio Caminha

Por conta disso, x_h é denominada a **parte transiente** (isto é, *transitória*) da oscilação, enquanto x_p é a **parte estacionária**.

(ii) Se $c = 0$ e $\omega_0 \neq \omega$, temos $B = 0$ e, graças a (5), $\cos \varphi_0 = \frac{A}{|A|}$ e $\sin \varphi_0 = 0$. Como $A > 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$, temos

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega > \omega_0 \\ \pi, & \text{se } \omega < \omega_0 \end{cases} .$$

Como $\Delta = -4\omega^2 < 0$ nesse caso, (6) e (7) dão

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \frac{F_0/m}{|\omega^2 - \omega_0^2|} \cos(\omega_0 t - \varphi_0). \end{aligned}$$

(Observe que as constantes C e φ são determinadas por $x(0)$ e $x'(0)$.)

Doravante, suporemos, por simplicidade, que $\varphi_0 = 0$. (O caso $\varphi_0 = \pi$ pode ser analisado de modo semelhante, utilizando as fórmulas $\operatorname{sen}(u - \pi) = -\operatorname{sen} u$ e $\operatorname{cos}(u - \pi) = -\operatorname{cos} u$.) Então, $\omega > \omega_0$ e

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t).$$

Para entender melhor o comportamento de $x(t)$ à medida em que t evolui, note que a EDO homogênea associada ao problema é, nesse caso ($c = 0$), $x'' + \omega^2 x = 0$. Portanto, $\cos(\omega t)$ também a resolve, de forma que, trocando $x_h(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ pela função $C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \cos(\omega t)$, podemos escrever $x(t)$ como

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)).$$

Transformando $\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)$ em produto, segue que

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) - \frac{2F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) t \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t.$$

Denotando

$$A(t) = \frac{2F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) t, \quad (8)$$

temos

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + A(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t.$$

Suponha, agora, que $\omega_0 \cong \omega$ mas $\omega_0 \neq \omega$. Então, $\frac{\omega + \omega_0}{2} \cong \omega$, de sorte que

$$x(t) \cong C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + A(t) \operatorname{sen}(\omega t),$$

com $\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ e $\operatorname{sen}(\omega t)$ tendo períodos $\frac{2\pi}{\omega}$.

Entretanto, segue imediatamente de (8) que $A(t)$ tem período $\frac{4\pi}{|\omega_0 - \omega|}$ e amplitude $\frac{2F_0/m}{|\omega^2 - \omega_0^2|}$, os quais são muito maiores que $\frac{2\pi}{\omega}$ e C , uma vez que $|\omega_0 - \omega| \ll 1$. (Recorde que $C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$, onde x_0 e v_0 denotam o deslocamento e a velocidade iniciais do bloco.)

Portanto, para valores de t tais que

$$|A(t)| > \frac{1}{2} \cdot \frac{2F_0/m}{|\omega^2 - \omega_0^2|} = \frac{F_0/m}{|\omega^2 - \omega_0^2|},$$

temos

$$x(t) \cong A(t) \operatorname{sen}(\omega t),$$

perturbado pela vibração de fundo $C \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$.

Prof. Antonio Caminha

A figura a seguir traz um esboço qualitativo dos gráficos de $\sin(\omega t)$, $A(t)$ e $A(t)\sin(\omega t)$ (de cima para baixo). Dizemos que tal gráfico corresponde à senóide $\sin(\omega t)$, *modulada* pelo fator $A(t)$:

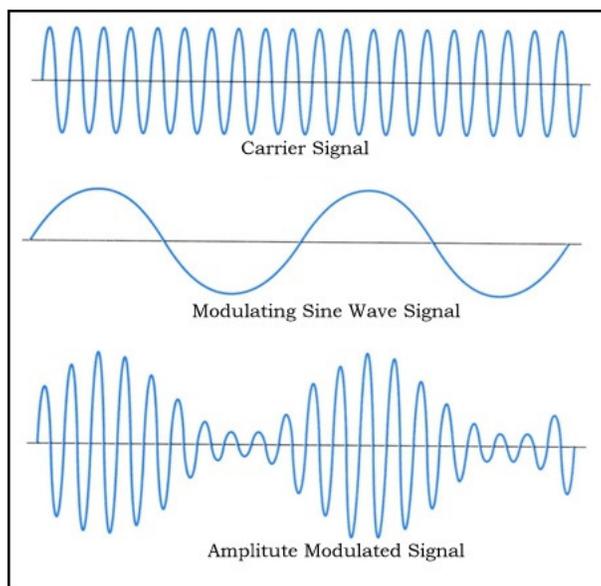


Figura 1: esboço qualitativo do gráfico de $A(t)\sin(\omega t)$.

Por fim, se $c = 0$ e $\omega_0 = \omega$, então os argumentos que utilizamos para procurar uma solução particular para (1) não funcionam mais, uma vez que o determinante (3) se anula.

Contudo, nesse caso (1) se reduz a

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (9)$$

e, uma vez que a equação característica de $x'' + \omega^2 x = 0$ tem duas raízes iguais, um candidato razoável a solução particular é

$$x_p(t) = t(\tilde{A} \cos(\omega t) + \tilde{B} \sin(\omega t)).$$

Prof. Antonio Caminha

Para ver se esse “chute” dará certo, note que, com $x_p(t)$ dessa forma, calculamos

$$x_p' = \tilde{A} \cos(\omega t) + \tilde{B} \sin(\omega t) - t(\tilde{A}\omega \sin(\omega t) - \tilde{B}\omega \cos(\omega t))$$

e

$$\begin{aligned} x_p'' &= -2\tilde{A}\omega \sin(\omega t) + 2\tilde{B}\omega \cos(\omega t) \\ &\quad - t(\tilde{A}\omega^2 \cos(\omega t) + \tilde{B}\omega^2 \sin(\omega t)) \\ &= -2\tilde{A}\omega \sin(\omega t) + 2\tilde{B}\omega \cos(\omega t) - \omega^2 x_p. \end{aligned}$$

Dessa forma, x_p resolve (9) se, e só se,

$$-2\tilde{A}\omega \sin(\omega t) + 2\tilde{B}\omega \cos(\omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t).$$

Portanto, fazendo $-2\tilde{A}\omega = 0$ e $2\tilde{B}\omega = \frac{F_0}{m}$, obtemos a solução particular

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega} \cdot t \sin(\omega t),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= C \sin(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2m\omega} \cdot t \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Para $t_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2\omega}$, com $k \in \mathbb{N}$, temos $\omega t_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, de maneira que

$$\begin{aligned} x(t_k) &= C \sin(\omega t_k + \varphi) + \frac{F_0}{2m\omega^2} \cdot \omega t_k \sin(\omega t_k) \\ &= C \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \frac{F_0}{2m\omega^2} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= C \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos \varphi + \frac{(-1)^k F_0}{2m\omega^2} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^k \left(C \cos \varphi + \frac{F_0}{2m\omega^2} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Prof. Antonio Caminha

Portanto, $|x(t_k)| \rightarrow +\infty$ à medida que $k \rightarrow +\infty$, e dizemos que ocorre **ressonância**.

Uma maneira simples de resumir a discussão acima em palavras é dizer que a igualdade entre as frequências natural e da força de excitação externa amplifica as oscilações de tal forma que, eventualmente, a mola sofrerá uma deformação permanente.

O fenômeno de ressonância pode afetar oscilações mais complexas, como aquelas geradas em pontes pelo fluxo dos ventos. Assim, ao projetar uma ponte, os engenheiros têm de levar em consideração o regime de ventos da região, sob pena de incorrer em situações catastróficas, como o célebre desabamento da primeira *Tacoma Narrows Bridge*, que colapsou em 7 de Novembro de 1940, somente quatro meses após inaugurada. A esse respeito, assista o vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=mXTSnZgrfxM&t=462s>.

Estudo & Problemas

1. Leia a seção 20 do livro-texto.