12. Alguns Fatos Sobre a Solução Geral de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Prof. Antonio Caminha*

5 de maio de 2022

Veremos mais adiante que várias EDOs lineares de segunda ordem que aparecem em aplicações têm coeficientes não constantes. Esses são, por exemplo, os casos da **equação de Legendre de ordem p**,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0,$$

e da **equação de Bessel de ordem p**,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

cujos problemas físicos correspondentes discutiremos em aulas futuras.

Via de regra, para EDOs lineares de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{1}$$

com $p, q, r : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas dadas, não há métodos simples para encontrar soluções. De fato, nas próximas aulas, veremos que, sob certas condições sobre as funções p, q e r, o melhor que podemos fazer é procurar *soluções em série*, isto é, da forma

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(x - x_0)^k, \tag{2}$$

com $x_0 \in I$ e $a_0, a_1, \ldots$ reais a serem determinados.

Em aplicações que geram soluções desse tipo, é frequentemente desejável entender os zeros e os intervalos de crescimento e decrescimento da solução definida por (2).

Como você talvez suspeite, geralmente é inviável, ou pelo menos muito difícil, fazer isso simplesmente examinando os coeficientes a_k. Por essa razão, nesta aula e na próxima vamos desenvolver alguns resultados que permitem atacar os problemas do parágrafo anterior para a equação homogênea associada a (1),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3}$$

sem a necessidade de conhecer a expressão explícita de suas soluções.

Comecemos recordando alguns fatos sobre (3), os quais discutimos brevemente na aula *EDOs Lineares de Segunda Ordem.*

Naquela aula, vimos que se $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ são soluções de (3), então toda função $y : I \to \mathbb{R}$ da forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, também é solução. Vimos também que vale o seguinte

Teorema 1 (de existência e unicidade)**.** *Dadas funções contínuas $p, q : I \to \mathbb{R}$ e números reais α e β, o PVI*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha,\ y'(x_0) = \beta \end{cases}. \tag{4}$$

admite uma única solução $y : I \to \mathbb{R}$.

Nesta aula, nosso objetivo principal é mostrar que, se conseguirmos encontrar duas soluções *independentes* de (3) (num sentido a ser definido logo mais), então teremos encontrado essencialmente todas as soluções. Para tanto, comecemos estendendo o conceito de *wronskiano* a duas soluções de (3).

Como na aula *EDOs Lineares de Segunda Ordem e Coeficientes Constantes III*, dadas duas soluções quaisquer $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ de (3), definimos seu **wronskiano** $W : I \to \mathbb{R}$ pondo

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \tag{5}$$

O resultado a seguir estende parcialmente o Lema 1 daquela aula.

Lema 2. *Se y_1 e y_2 são soluções de* (3) *com wronskiano W, então ou W é identicamente nulo ou W nunca se anula em I.*

Prova. Começamos observando que

$$\begin{aligned} W' &= \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -p(x)y_1' - q(x)y_1 & -p(x)y_2' - q(x)y_2 \end{vmatrix} \\ &= -p(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - q(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= -p(x)W. \end{aligned}$$

Portanto, $W' + p(x)W = 0$, de sorte que, como sabemos,

$$W = Ce^{-\int p(x)dx},$$

para alguma constante real c. Então, como $e^{-\int p(x)dx} \neq 0$ para todo x, temos que W ou é identicamente nulo (se $C = 0$), ou nunca se anula (se $C \neq 0$). □

Para o que segue, precisamos formalizar o conceito de *dependência* e *independência* para funções. Fazemos isto dizendo que as funções $f, g : I \to \mathbb{R}$ são **linearmente dependentes** (abreviamos **LD**) se uma delas for um múltiplo constante da outra. Caso contrário, isto é, se nenhuma das funções f e g for um múltiplo constante da outra, dizemos que f e g são **linearmente independentes** (abreviamos **LI**). Em particular, se f for a função identicamente nula, então f e g são LD, uma vez que $f = 0 \cdot g$.

A importância do wronskiano é que ele detecta se duas soluções de (3) são LD ou LI.

Lema 3. *Em relação a* (3)*, as soluções y_1 e y_2 são LD se, e só se, seu wronskiano W é identicamente nulo.*

Prova. Suponhamos primeiramente que y_1 e y_2 são LD. Por definição, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 = ay_2$ ou $y_2 = ay_1$. Admitamos que o segundo caso ocorra (o primeiro pode ser tratado de modo análogo). Então,

$$\begin{aligned} W &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ &= y_1 \cdot (ay_1)' - y_1' \cdot (ay_1) \\ &= y_1 \cdot ay_1' - y_1' \cdot ay_1 = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que W é identicamente nulo. Se a função y_1 for identicamente nula, nada há a fazer, pois, como já sabemos, y_1 e y_2 serão LD. Suponha, pois, que y_1 não seja identicamente nula em I. Então, se $x_0 \in I$ é tal que $y_1(x_0) \neq 0$, a continuidade[1] de y_1 garante a existência de um intervalo (a, b) tal que $x_0 \in (a, b) \subset I$ e $y_1 \neq 0$ em (a, b). Segue que

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2} = 0,$$

[1]Mais precisamente, o *lema de permanência do sinal.*

de sorte que $\frac{y_2}{y_1}$ é constante em (a,b), digamos, $\frac{y_2}{y_1} = c$ em (a,b).

Então, $y_2 = cy_1$ em (a,b), logo, $y_2' = cy_1'$ em (a,b). Em particular, $y_2(x_0) = cy_1(x_0)$ e $y_2'(x_0) = cy_1'(x_0)$, de maneira que $y_2, cy_1 : I \to \mathbb{R}$ são soluções do mesmo PVI. Portanto, a parte de unicidade do Teorema 1 garante que $y_2 = cy_1$ em I. $\square$

Podemos finalmente enunciar e provar o resultado principal desta aula.

Teorema 4. *Sejam $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ soluções de (3). São equivalentes:*

(a) ⟺ (b) segue do lema 3

(a) *y_1 e y_2 são LI.*

(b) *Toda solução $y : I \to \mathbb{R}$ da EDO pode ser escrita como $y = c_1y_1 + c_2y_2$, para certos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

(c) *Existe $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) \neq 0$.*

Prova.
(a) $\Rightarrow$ (b): se $y : I \to \mathbb{R}$ é uma solução qualquer de (3), queremos mostrar que existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Fixado $x_0 \in I$, afirmamos inicialmente que basta mostrar ser possível escolher $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'(x_0) \end{cases} . \tag{6}$$

Realmente, uma vez feito isso, as funções y e $c_1y_1 + c_2y_2$ serão soluções de (3) satisfazendo as mesmas condições iniciais; portanto, a parte de unicidade do Teorema 1 garantirá que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ em I.

Para o que falta, note que o determinante principal de (6) é $W(x_0)$, onde W é o wronskiano de y_1 e y_2. Como y_1 e y_2 são

LI, o lema anterior garante que W não é identicamente nulo. Portanto, o Lema 2 garante que W nunca se anula, de forma que, em particular, $W(x_0) \neq 0$. Segue da regra de Cramer que (6) tem uma solução única.

(b) $\Rightarrow$ (c): se $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, então o sistema (6) tem solução. Como $y(x_0)$ e $y'(x_0)$ podem, pelo teorema de existência e unicidade, assumir quaisquer valores reais, a Álgebra Linear ensina que a matriz principal de (6) é invertível. Mas isso é o mesmo que dizer que $W(x_0) \neq 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a): imediato de (3). $\square$

O resultado anterior diz que, a fim de resolver (3), basta encontrarmos duas soluções LI. De fato, se encontrarmos uma solução que não se anula em I, o próximo resultado ensina como achar outra.

Proposição 5. *Se $y_1 : I \to \mathbb{R}$ é uma solução de* (3) *que não se anula em I e*

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}, \tag{7}$$

então y_1 e $y_2 = v y_1$ são soluções LI de (3)*.*

Prova. Sabemos que

$$y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 = 0.$$

Impondo que $y_2 = vy_1$ resolva (3), temos

$$\begin{aligned}
0 &= y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \\
&= (vy_1)'' + p(x)(vy_1)' + q(x)vy_1 \\
&= (v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + p(x)(v'y_1 + vy_1') + q(x)vy_1 \\
&= v''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v' + v(\underbrace{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1}_{=0}) \\
&= v''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v'.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v' = 0$$

ou, o que é o mesmo (recorde que, por hipótese, y_1 não se anula em I),

$$v'' + \Big(\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\Big)v' = 0. \tag{8}$$

Essa é uma EDO linear de primeira ordem em v', a qual já sabemos possuir solução. Contudo, a fim de não precisarmos invocar uma fórmula já esquecida, revisemos os passos que levaram à solução.

Ignorando por um momento que v' possa anular-se em um ou mais pontos de I, temos

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p(x).$$

Integrando ambos os membros da última EDO acima (e ignorando os sinais de v' e y_1 por enquanto), obtemos sucessivamente

$$\log v' = -2\log y_1 - \int p(x)dx,$$

$$v' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,dx}, \tag{9}$$

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}.$$

Resta mostrar que a função v, definida como acima, realmente satisfaz (8), e que y_1 e $y_2 = vy_1$ são LI.

Para a primeira parte, note que, pelo TFC, v' é realmente dada por (9), com o que a regra da cadeia dá

$$\begin{aligned}
v'' &= \frac{d}{dx}(y_1^{-2}) \cdot e^{-\int p\,dx} + y_1^{-2} \cdot \frac{d}{dx} e^{-\int p\,dx} \\
&= -2y_1^{-3} y_1' \, e^{-\int p\,dx} + y_1^{-2} \cdot e^{-\int p\,dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\int p\,dx\right) \\
&= \left(-2y_1^{-3}y_1' - y_1^{-2}p(x)\right) e^{-\int p\,dx}.
\end{aligned}$$

A partir daí, é imediato verificar a validade de (8).

Por fim, para checar que y_1 e y_2 são LI, suponha que fossem LD. Então, teríamos $y_2 = cy_1$, para alguma constante real c, de sorte que $vy_1 = cy_1$, logo, $v = c$, isto é, v seria constante. Mas aí, seria $v' = 0$, o que por sua vez contradiria (9). □

A primeira parte da demonstração da proposição anterior é mais importante do que a expressão (7) em si, na medida em que fornece um método para encontrar uma segunda solução da EDO. O exemplo a seguir coloca tal método em ação.

Exemplo 6. *Encontre a solução do PVI*

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' - y = 0 \\ y(1) = 1, \; y'(1) = 3 \end{cases}$$

no intervalo $(0, +\infty)$.

Solução. A função $y_1(x) = x$ é claramente uma solução da EDO, definida até em $\mathbb{R}$. No intervalo $(0, +\infty)$, a EDO equivale a

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0,$$

que é (3) com $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Como $y_1 \neq 0$ em $(0, +\infty)$, a proposição anterior garante a existência de uma solução $y_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ da forma $y_2 = vy_1 = xv$ e tal que y_1 e y_2 são LI. Então, impondo que y_2 resolva a EDO, temos

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + \frac{1}{x}y_2' - \frac{1}{x^2}y_2 \\ &= (xv)'' + \frac{1}{x}(xv)' - \frac{1}{x^2}(xv) \\ &= (2v' + xv'') + \frac{1}{x}(v + xv') - \frac{1}{x}v \\ &= xv'' + 3v'. \end{aligned}$$

Portanto (e uma vez que sabemos, pela demonstração da proposição, que os cálculos irão funcionar), obtemos sucessivamente

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{3}{x}, \quad \log v' = -3\log x, \quad v' = x^{-3}, \quad v = -\frac{1}{2}x^{-2}.$$

Assim, $y_2 = xv = -\frac{1}{2x}$, de sorte que a solução geral é da EDO é

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1x - \frac{c_2}{2x}.$$

Por fim, as condições iniciais do enunciado impõem que tenhamos

$$c_1 - \frac{c_2}{2} = 1 \ \text{ e } \ c_1 + \frac{c_2}{2} = 3,$$

de modo que $c_1 = c_2 = 2$. A solução do PVI no intervalo $(0, +\infty)$ é, então,

$$y(x) = 2x - \frac{1}{x}.$$

$\square$

Estudo & Problemas

1. Leia a seção 15 do livro-texto e faça os problemas 2, 5 e 11.
2. Leia a seção 16 do livro-texto e faça os problemas 4, 5, 6 e 8.