13. Os Teoremas de Sturm

Prof. Antonio Caminha*

10 de maio de 2022

Nesta aula, nosso objetivo é provar alguns resultados sobre a oscilação e os zeros de soluções de uma solução não trivial de uma EDO do tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

onde $p, q : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas. Tais resultados são devidos ao matemático suíço do século XIX Jacques Sturm e, por isso, são conhecidos como os *teoremas de Sturm*.

Comecemos com um resultado auxiliar, para cuja prova lembramos que, se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais, então uma *subsequência* de $(x_n)_{n\geq 1}$ é a sequência obtida *restringindo n a um subconjunto infinito de índices*, isto é, algo do tipo $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$, para certos naturais $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Nesse caso, é costume denotarmos a subsequência por $(x_{n_k})_{k\geq 1}$.

Lema 1. *Se $y : I \to \mathbb{R}$ é uma solução não identicamente nula de (1) e $[a, b] \subset I$, então y tem no máximo um número finito de zeros em $[a, b]$.*

Prova. Por contradição, suponhamos que y tivesse uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ de zeros distintos no intervalo $[a, b]$.

Pelo Teorema de Weierstrass[1], dessa sequência de zeros poderíamos extrair uma subsequência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$, convergente para um certo $x_0 \in [a, b]$. Sendo esse o caso, teríamos:

$$x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0 \Longrightarrow \underbrace{y(x_{n_k})}_{=0} \xrightarrow{k} y(x_0) \Longrightarrow y(x_0) = 0$$

e

$$y'(x_0) = \lim_{k\to+\infty} \frac{y(x_{n_k}) - y(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = \lim_{k\to+\infty} \frac{0 - 0}{x_{n_k} - x_0} = 0.$$

Mas, sendo $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 0$, a parte de unicidade do Teorema de Existência e Unicidade para PVI, aplicada a (1), implicaria que $y \equiv 0$, o que é uma contradição. $\square$

Teorema 2 (de separação de Sturm)**.** *Se $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ são duas soluções LI de* (1)*, então os zeros dessas funções, se existirem, são distintos e ocorrem alternadamente. Mais precisamente:*

(*a*) *Não existe $x_0 \in I$ tal que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$.*

(*b*) *y_1 se anula exatamente uma vez entre dois zeros consecutivos de y_2, e vice-versa.*

Prova. Para o item (a), tome $x_0 \in I$ tal que $y_1(x_0) = 0$. Sendo W o wronskiano de y_1 e y_2, temos

$$W(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) = -y_1'(x_0)y_2(x_0).$$

Como as soluções são LI, mostramos na aula anterior (Lemas 2 e 3) que W nunca se anula. Logo, $y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$ e, em particular, $y_2(x_0) \neq 0$. Analogamente, $y_2(x_0) = 0 \Rightarrow y_1(x_0) \neq 0$.

[1] Veja as notas de aula sobre convergência de sequências de números reais.

Olhando agora para (b), sejam $a < b$ dois zeros consecutivos de y_2 (o fato de que podemos tomar zeros consecutivos de y_2 — caso haja pelo menos dois zeros — é garantido pelo lema anterior). Então,

$$W(a) = y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = y_1(a)y_2'(a)$$

e, analogamente,

$$W(b) = y_1(b)y_2'(b).$$

Como W nunca se anula (pois y_1 e y_2 são LI) e W é uma função contínua em I, o TVI garante que W tem sinal constante em I. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $W > 0$ em I (o caso $W < 0$ é análogo). Então,

$$y_1(a)y_2'(a) > 0 \text{ e } y_1(b)y_2'(b) > 0. \qquad (*)$$

Se mostrarmos que $y_2'(a)$ e $y_2'(b)$ têm sinais opostos, seguirá das desigualdades acima que $y_1(a)$ e $y_1(b)$ também têm sinais opostos, e o TVI garantirá a existência de pelo menos um zero para y_1 no intervalo (a, b).

Como $a < b$ são zeros consecutivos de y_2, temos (novamente pelo TVI) que y_2 tem sinal constante em (a, b). Suponha (de novo sem perda de generalidade) que $y_2 > 0$ em (a, b). Então, para $h > 0$ suficientemente pequeno, temos $y_2(a + h) - y_2(a) = y_2(a + h) > 0$, de sorte que

$$y_2'(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{y_2(a + h) - y_2(a)}{h} \geq 0.$$

Mas, como $y_2'(a) \neq 0$, deve ser $y_2'(a) > 0$. Analogamente,

$$y_2'(b) = \lim_{h\to 0-} \frac{y_2(b + h) - y_2(b)}{h} \leq 0,$$

Aqui isso segue direto de $(*)$

logo, $y_2'(b) \neq 0$ implica $y_2'(b) < 0$.

Por fim, se y_1 tivesse pelo menos dois zeros $c < d$ no intervalo (a, b), então, repetindo o argumento acima trocando os papeis de y_1 e y_2, concluiríamos que y_2 teria pelo menos um zero no intervalo (c, d). Por sua vez, isso contradiria o fato de que a e b são zeros *consecutivos* de y_2. $\square$

Na Aula 9:

$y'' + by' + cy = 0$

$b, c \in \mathbb{R}$

$y = uv$

$\vdots$

$$\begin{cases} v = e^{-\frac{bx}{2}} \\ u'' - \frac{\Delta}{4} u = 0 \\ \Delta = b^2 - 4c \end{cases}$$

A fim de investigar a *existência* de zeros para soluções de (1), precisamos colocar tal equação em sua *forma normal*, isto é, uma certa EDO equivalente (em um sentido a ser precisado) à original, mas sem termo em y'. Para tanto, utilizando variação de parâmetros, escrevamos y como $y = uv$, com u e v funções a determinar.

Partindo de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, com $p, q : I \to \mathbb{R}$ contínuas, e procedendo como na aula anterior, temos

$$\begin{aligned} & y'' + p(x)y' + q(x)y = \\ & = (uv)'' + p(x)(uv)' + q(x)uv \\ & = (uv'' + 2u'v' + u''v) + p(x)(uv' + u'v) + q(x)uv \\ & = vu'' + (2v' + p(x)v)u' + (v'' + p(x)v' + q(x)v)u. \end{aligned} \tag{2}$$

Impondo que $2v' + p(x)v = 0$, sabemos que uma possibilidade é

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} > 0.$$

compone com $v = e^{-\frac{bx}{2}}$ quando $p(x) = b$ é constante

Por outro lado, tomando tal v e supondo que $p' : I \to \mathbb{R}$ também é contínua, temos

$$\begin{aligned} v' = -\frac{1}{2}p(x)v \Rightarrow v'' &= -\frac{1}{2}(p'(x)v + p(x)v') \\ &= -\frac{1}{2}p'(x)v - \frac{1}{2}p(x)\left(-\frac{1}{2}p(x)v\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}p'(x) + \frac{1}{4}p(x)^2\right)v, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} & v'' + p(x)v' + q(x)v = \\ & = \left(-\frac{1}{2}p'(x) + \frac{1}{4}p(x)^2\right)v - \frac{1}{2}p(x)^2 v + q(x)v \\ & = \left(q(x) - \frac{1}{4}p(x)^2 - \frac{1}{2}p'(x)\right)v. \end{aligned}$$

Voltando a (2) e recordando que $v > 0$ em I, concluímos que

$$\begin{aligned} & y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow vu'' + \left(q(x) - \frac{1}{4}p(x)^2 - \frac{1}{2}p'(x)\right)vu = 0 \\ & \Leftrightarrow u'' + \tau(x)u = 0, \end{aligned}$$

$u'' = \frac{\Delta}{4}u$ (antes)

$u'' = \left(\frac{p(x)^2 - 4q(x) - 2p'(x)}{4}\right)u$

em que

$$\tau(x) = q(x) - \frac{1}{4}p(x)^2 - \frac{1}{2}p'(x). \quad \approx -\frac{\Delta}{4} - \frac{p'}{2} \tag{3}$$

A **forma normal** de (1) (supondo que $p, p', q : I \to \mathbb{R}$ são contínuas) é a EDO

$$u'' + \tau(x)u = 0, \tag{4}$$

em que $\tau : I \to \mathbb{R}$ é dada por (3). Sua importância reside no fato de que

$$u \text{ resolve } (4) \Longleftrightarrow uv \text{ resolve } (1), \text{ com } v > 0.$$

Assim, para estudarmos os zeros de uma solução não trivial de (1), é suficiente estudarmos os zeros da solução correspondente de (4). Nesse sentido, um primeiro resultado é o seguinte.

Teorema 3. *Se $\tau < 0$ em I*, τ continua *e $u = u(x)$ é uma solução não trivial de (4), então u tem no máximo um zero em I.*

Prova. Suponha que u tivesse zeros $x_1 < x_2$ em I, os quais podemos assumir (pelo Lema 1) serem zeros consecutivos de u. Uma vez que u é não trivial, argumentando como na prova do Teorema de Separação de Sturm, podemos supor que u é positiva em (x_1, x_2) e $u'(x_1) > 0$.

Sendo $a \in (x_1, x_2)$ o ponto de máximo de u, segue que $u(a) > 0$ e $u''(a) \leq 0$. Mas, por outro lado,

$$u''(a) = -\tau(a)u(a) > 0.$$

(Uma vez que $\tau(a) < 0$.) Isso é uma contradição! $\square$

Mais interessante (e útil) é o próximo resultado.

Teorema 4 (de oscilação de Sturm)**.** *Seja $\tau : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $u = u(x)$ uma solução não trivial de $u'' + \tau(x)u = 0$ em $(0, +\infty)$. Se existe $x_0 > 0$ tal que $\tau(x) > 0$ para todo $x > x_0$ e*

$$\int_{x_0}^{+\infty} \tau(x)dx = +\infty,$$

então u tem infinitos zeros no intervalo $(x_0, +\infty)$.

Prova. Por contradição, suponha que u só tem um número finito de zeros no intervalo $(x_0, +\infty)$. Então, podemos tomar

$x_1 > x_0$ tal que u não se anula em $[x_1, +\infty)$. Trocando u por $-u$, se necessário, podemos supor que $u > 0$ em $[x_1, +\infty)$.

As hipóteses sobre a função τ nos permitirão provar que existe $x_2 > x_1$ para o qual $u'(x_2) < 0$. Admitindo isso por um momento, note que

$$x > x_2 \Longrightarrow u''(x) = -\tau(x)u(x) < 0.$$

Então, a fórmula de Taylor com resto integral (ver a nota de aula *EDOs Lineares de Segunda Ordem e Coeficientes Constantes I*) dá, para $x > x_2$

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_2) + u'(x_2)(x - x_2) + \int_{x_2}^{x} \underbrace{(x-t)u''(t)}_{<0} dt \\ &< u(x_2) + \underbrace{u'(x_2)}_{<0}(x - x_2). \end{aligned}$$

Assim, $u(x) < 0$ para $x \gg x_2$, o que é uma contradição.

Resta utilizarmos as hipóteses sobre τ para garantir a existência de $x_2 > x_1$ tal que $u'(x_2) < 0$. Para tanto, considerando a função $f : [x_1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)},$$

basta garantirmos a existência de $x_2 > x_1$ tal que $f(x_2) > 0$.

Para o que falta, note inicialmente que

$$\begin{aligned} f' &= -\frac{u''u - (u')^2}{u^2} = -\frac{(-\tau u)u - (u')^2}{u^2} \\ &= \frac{\tau u^2 + (u')^2}{u^2} = \tau + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 \\ &= \tau + f^2 \geq \tau. \end{aligned}$$

Então, o TFC e a estimativa acima dão

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &= \int_{x_1}^{x} f'(t)dt \geq \int_{x_1}^{x} \tau(t)\, dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \tau(t)\, dt - \int_{x_0}^{x_1} \tau(t)\, dt \\ &\to +\infty \text{ quando } x \to +\infty. \end{aligned}$$

Assim, é claro que podemos tomar $x_2 > x_1$ tal que $f(x_2) > 0$. □

Exemplo 5. A equação de Bessel de ordem $p \geq 0$ é a EDO de segunda ordem

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

em $(0, +\infty)$, onde p é um parâmetro real. Uma solução não trivial $y_p : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dessa equação é denominada uma **função de Bessel**.

Um cálculo simples (cf. problema 2) garante que a forma normal da equação de Bessel de ordem p é a EDO de segunda ordem (no intervalo $(0, +\infty)$)

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right) u = 0, \tag{5}$$

e vimos que os zeros de u e $y_p = uv$ (para um mesmo valor de p) coincidem.

Nas notações da discussão anterior, temos

$$\tau(x) = 1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2} \longrightarrow 1$$

quando $x \to +\infty$. Portanto, existe $x_0 > 0$ tal que $\tau(x) > \frac{1}{2}$ para $x > x_0$, de sorte que τ satisfaz as hipóteses do Teorema de

Oscilação de Sturm. Então, u (e, logo, y_p) possui infinitos zeros no intervalo $(0, +\infty)$.

A figura 1 esboça o gráfico de um certo múltiplo constante da função y_p (para $0 \leq p \leq 3$ inteiro), denominado a **função de Bessel de primeiro tipo** (e ordem p) e denotado por J_p. Teremos mais a dizer sobre tais funções em aulas futuras.

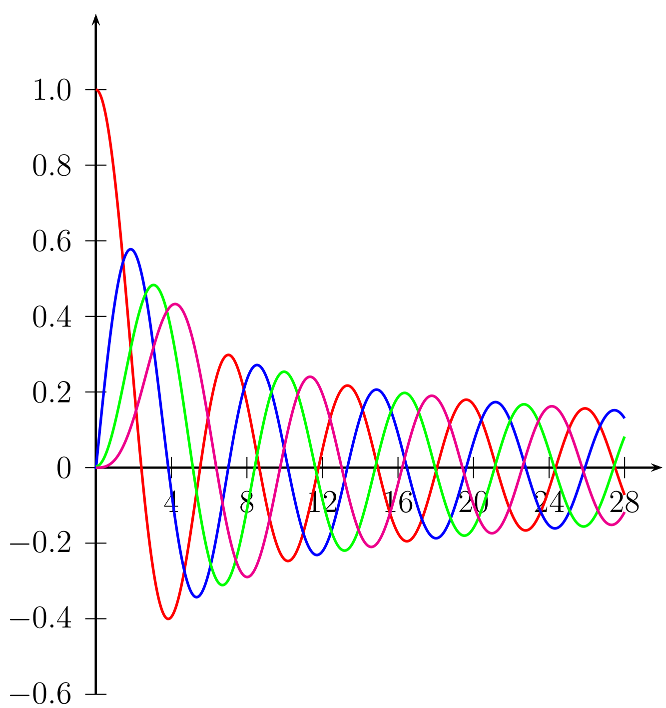

Figura 1: gráfico de J_0 (vermelho), J_1 (azul), J_2 (verde) e J_3 (magenta).

A seguir, temos o último teorema de Sturm, que compara as soluções de duas EDOs distintas do tipo (4).

Teorema 6 (de comparação de Sturm)**.** *Sejam* $u_1 = u_1(x)$ *e* $u_2 = u_2(x)$ *soluções não triviais de* $u'' + \tau_1(x)u = 0$ *e* $u'' + \tau_2(x)u = 0$*, com* $\tau_1, \tau_2 : I \to \mathbb{R}$ *funções ~~positivas~~. Se* $\tau_1 > \tau_2$

condição desnecessária

contínuas.

em I, então u_1 se anula pelo menos uma vez entre dois zeros consecutivos de u_2.

Prova. Raciocinando uma vez mais por contradição, sejam $a < b$ dois zeros consecutivos de u_2, e suponha que u_1 não se anula no intervalo (a, b). Trocando u_j por $-u_j$, se necessário, podemos supor que $u_1, u_2 > 0$ em (a, b).

Seja $W : I \to \mathbb{R}$ a função definida por $W = u_1 u_2' - u_1' u_2$ (só não chamamos W de wronskiano de u_1 e u_2 porque tais funções são soluções de EDOs distintas). Temos

$$\begin{aligned} W' &= (u_1 u_2' - u_1' u_2)' \\ &= \cancel{u_1' u_2'} + u_1 u_2'' - u_1'' u_2 - \cancel{u_1' u_2'} \\ &= u_1(-\tau_2 u_2) - (-\tau_1 u_1) u_2 \\ &= (\tau_1 - \tau_2) u_1 u_2, \end{aligned}$$

o qual é positivo em (a, b).

Integrando ambos os lados em $[a, b]$ obtemos, pelo TFC,

$$W(b) = W(a) + \int_a^b W'(t)dt > W(a).$$

Contudo, como $u_2(a) = u_2(b) = 0$ mas $u_2 > 0$ em (a, b), argumentando como na demonstração do teorema de ~~oscilação~~, concluímos que

separação

$$u_2'(a) \geq 0 \geq u_2'(b).$$

"$>$" é verdade mas é desnecessário aqui e dá trabalho de justificar precisaria: (por contradição $u_2(a) = 0$ e $u_2'(a) = 0$ $\Rightarrow$ $u_2 \equiv 0$ Picard)

Então, uma vez que $u_1(a), u_1(b) \geq 0$, temos

$$W(a) = (u_1 u_2' - u_1' u_2)(a) = u_1(a) u_2'(a) \geq 0$$

e

$$W(b) = (u_1 u_2' - u_1' u_2)(b) = u_1(b) u_2'(b) \leq 0,$$

de forma que

$$W(b) \leq W(a).$$

Isso dá a contradição desejada. $\square$

Nas hipóteses e notações do teorema anterior, seu significado heurístico é que u_1 *oscila mais rapidamente que* u_2.

Exemplo 7. Seja y_p uma função de Bessel de ordem p.

(a) Se $0 \leq p < \frac{1}{2}$, então todo intervalo da forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}_+$, contém ao menos um zero de y_p.

(b) Se $p > \frac{1}{2}$, então todo intervalo da forma $(k\pi, (k+1)\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}_+$, contém no máximo um zero de y_p.

Prova. Novamente, basta examinar os zeros de uma solução não trivial u_p da forma normal (5). Façamos a prova de (a), deixando a demonstração de (b) como exercício (veja o problema 4).

Se $0 \leq p < \frac{1}{2}$, então $1 - 4p^2 > 0$, de forma que,

$$\tau(x) = 1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2} > 1,$$

para todo $x > 0$. Portanto, pelo teorema anterior, u_p se anula pelo uma vez entre dois zeros de uma solução não trivial de $u'' + u = 0$, digamos, $u(x) = \operatorname{sen} x$. Basta, agora, perceber que os zeros não negativos de $\operatorname{sen} x$ são da forma $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

1 Estudo e exercícios

Leia o capítulo 4 do livro-texto (seções 24 e 25) e faça os seguintes problemas:

1. Mostre que toda solução não trivial de $y'' + (\operatorname{sen}^2 x + 1)y = 0$ tem um número infinito de zeros positivos.

2. Complete a discussão do Exemplo 5, deduzindo a forma normal da equação de Bessel.

3. Encontre as soluções da equação de Bessel de ordem $\frac{1}{2}$.

4. Complete a demonstração do Exemplo 7.

5. Mostre que, se $p > \frac{1}{2}$, então existe $\epsilon_p > 0$ tal que uma função de Bessel qualquer y_p não se anula no intervalo $(0, \epsilon_p)$. (Sugestão: aplique o Teorema 3.)

6. Mostre que, se $p > \frac{1}{2}$, o conjunto dos zeros de uma função de Bessel y_p no intervalo $[0, +\infty)$ forma uma sequência $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ tal que $x_n \to +\infty$ à medida que $n \to +\infty$. (Sugestão: aplique o resultado do problema anterior, juntamente com o Exemplo 5.)