14. Convergência de Sequências

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, estamos interessados em reconhecer se os números reais a_n aproximam-se *cada vez mais* de algum número real l, à medida que n aumenta; por exemplo, se $a_n = \frac{1}{n}$, é razoável dizer que os números a_n aproximam-se de 0 à medida que n aumenta, haja vista que o resultado da divisão de 1 por n é cada vez menor à medida que n aumenta. Nesse sentido, temos a definição central a seguir.

Definição 1. *Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$* **converge** *para um real l quando, fixado arbitrariamente um erro $\epsilon > 0$ para o valor de l, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \epsilon$, para todo $n > n_0$.*

Alternativamente, se $(a_n)_{n\geq 1}$ convergir para l, diremos que a sequência é **convergente** e que l é o **limite** da mesma, fato que denotaremos escrevendo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l, \quad a_n \xrightarrow{n} l \;\text{ ou }\; a_n \to l.$$

Por fim, uma sequência que não converge para real algum será dita **divergente**.

Ainda em relação à definição anterior, é de se esperar que, ao diminuirmos o erro $\epsilon > 0$, tenhamos de aumentar o natural n_0 a fim de que $|a_n - l|$ seja menor que ϵ para $n > n_0$; em outras palavras, é de se esperar que n_0 dependa de $\epsilon > 0$. De qualquer modo, o importante para assegurar a convergência da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ para l é que, fixado arbitrariamente um erro $\epsilon > 0$, sejamos capazes de encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon.$$

A seguir, colecionamos alguns exemplos de sequências convergentes e divergentes.

Exemplos 2.

(a) Se $a_n = \frac{1}{n}$, então $a_n \xrightarrow{n} 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, temos

$$|a_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon};$$

assim, basta começar com $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$; tomando $n > n_0$, teremos $|a_n - 0| < \epsilon$.

(b) Se $a_n = (-1)^n$, então $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge. Realmente, os termos da sequência, sendo alternadamente iguais a 1 e -1, não podem aproximar-se de um mesmo número real l. (Para um argumento rigoroso, veja o Corolário 6.)

(c) Se $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, então $a_n \xrightarrow{n} 1$. Isso porque $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$, de maneira que $|a_n - 1| < \epsilon$ para $n > \frac{1}{\epsilon}$.

(d) Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência constante, com $a_n = c$ para todo $n \geq 1$, então $a_n \to c$. Realmente, para todos $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $|a_n - c| = 0 < \epsilon$.

Exemplo 3. *A sequência* $(a_n)_{n\geq 1}$*, dada por* $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$*, converge para* 0*.*

Prova. Inicialmente, veja que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, se $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$ teremos $|a_n - 0| = a_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$.

Como $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$ equivale a $n > \frac{1}{4\epsilon^2}$, basta começarmos com $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{4\epsilon^2}$; tomando $n > n_0$, teremos $|a_n - 0| < \epsilon$. $\square$

O próximo resultado será utilizado várias vezes em desenvolvimentos posteriores.

Proposição 4. *Dado* $0 < |q| < 1$*, se* $a_n = q^n$*, então* $a_n \xrightarrow{n} 0$*.*

Prova. Como $\frac{1}{|q|} > 1$, podemos escrever $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$. Portanto, a fórmula do binômio de Newton fornece

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \alpha^k = 1 + n\alpha$$

e, daí,

$$|a_n - 0| = |q^n| = |q|^n \leq \frac{1}{1+n\alpha}.$$

Assim, $|a_n - 0| < \epsilon$ se $\frac{1}{1+n\alpha} < \epsilon$, o que equivale (faça os cálculos) a $n > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$. Então, começando com $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$, temos que

$$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) \Rightarrow |a_n - 0| = |q|^n \leq \frac{1}{1+n\alpha} < \epsilon.$$

$\square$

A proposição a seguir lista algumas propriedades básicas de limites de sequências. Para seu enunciado, dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, definimos uma **subsequência** da mesma como a restrição de $(a_n)_{n\geq 1}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\}$ do conjunto de índices. Como a função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}'$ dada por $j \mapsto n_j$ é uma bijeção, toda subsequência de uma sequência é, ainda, uma sequência. Ademais, podemos denotá-la por $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposição 5. *Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência tal que $a_n \to l$.*

(a) *Se $l < a$ (resp. $l > a$), então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < a$ (resp. $a_n > a$) para todo $n > n_0$.*

(b) *Se $a_n \geq a$ (resp. $a_n \leq a$), para todo $n \geq 1$, então $l \geq a$ (resp. $l \leq a$) .*

(c) *Toda subsequência $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para l.*

Prova.
(a) Suponha que $l < a$ (o caso $l > a$ pode ser tratado de modo análogo). Tomando $\epsilon = a - l > 0$, a definição de limite de sequências garante a existência de um índice n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$. Então,

$$n > n_0 \Rightarrow -\epsilon < a_n - l < \epsilon \Rightarrow a_n < l + \epsilon = a.$$

(b) Segue imediatamente de (a), por contraposição. Realmente, se fosse $l < a$, então o item (a) garantiria a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n < a$. Da mesma forma, se fosse $l > a$, o item (a) garantiria a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n > a$.

(c) Como $a_n \xrightarrow{n} l$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \epsilon$, para todo $n > n_0$. Mas, como $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, existe um índice n_i na subsequência tal que $n_i > n_0$; portanto,

$$j \geq i \Rightarrow n_j \geq n_i \Rightarrow n_j > n_0 \Rightarrow |a_{n_j} - l| < \epsilon.$$

Mas isso é o mesmo que dizer que $a_{n_k} \xrightarrow{k} l$. □

Apesar da notação carregada, o item (c) da proposição acima pode ser resumido em palavras de uma maneira bastante simples: basicamente, ele afirma que, se os termos de uma sequência aproximam-se de um real l à medida que aumentamos seus índices, então, quando consideramos somente uma parte (ainda infinita) desses termos, eles continuam se aproximando de l à medida que aumentamos seus índices.

A proposição anterior possui a seguinte consequência imediata, a qual fornece uma condição *suficiente* para a divergência de uma sequência.

Corolário 6. *Uma sequência que possui duas subsequências convergindo para limites distintos é divergente.*

Prova. Realmente, se a sequência inicial convergisse, digamos para l, então, pela proposição anterior, todas as suas subsequências também convergiriam para l. □

Até agora, exceto por alguns exemplos bastante simples, não vimos ainda como é possível calcular o limite de uma sequência que saibamos ser convergente. Para remediar essa situação, precisamos entender como *operar* com limites de sequências, problema que examinamos no que segue.

Precisaremos, inicialmente, de um resultado auxiliar. Para o enunciado do mesmo, recorde que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais é, antes de mais nada, uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Portanto, a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é **limitada** se existir $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \geq 1$.

Lema 7. *Toda sequência convergente é limitada.*

Prova. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência que converge para o limite l. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < 1$. Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow l - 1 < a_n < l + 1 \Rightarrow a_n \in (l - 1, l + 1).$$

Então, basta tomar $M > 0$ tal que o intervalo $[-M, M]$ contenha tanto o intervalo $(l-1, l+1)$ quanto os termos $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$. $\square$

Você pode omitir a demonstração da proposição a seguir numa primeira leitura. Entretanto, é imprescindível se acostumar com as *propriedades aritméticas* que ela lista.

Proposição 8. *Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências convergentes de números reais e c é um número real qualquer.*

(a) *Se $a_n \to a$, então $ca_n \to ca$.*

(b) *Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, então $a_n \pm b_n \to a \pm b$.*

(c) *Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, então $a_n b_n \to ab$.*

(d) *Se $a_n \to 0$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ é limitada, então $a_n b_n \to 0$.*

(e) *Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$, com $b, b_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, então $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Prova.
(a) Se $c = 0$, então $ca_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e segue do item (d) do Exemplo 2 que $ca_n \to 0 = ca$. Suponhamos, pois,

que $c \neq 0$, e seja dado $\epsilon > 0$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|}$. Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow |ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

(b) Provemos que $a_n + b_n \to a + b$ (provar que $a_n - b_n \to a - b$ é análogo). Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ e } \ n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, tomando $n > \max\{n_1, n_2\}$ e utilizando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(c) Comecemos observando que

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|, \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade triangular na última passagem acima. Assim, dado $\epsilon > 0$, basta conseguirmos que $|a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| < \epsilon$ para todo índice n suficientemente grande.

Para o que falta, o lema anterior garante que podemos tomar $L > 0$ tal que $|b_n| < L$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2L} \ \text{ e } \ n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a| + 1}.$$

Então, para $n > n_0$, com $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\
&< \frac{\epsilon}{2L} \cdot L + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2|a| + 1} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

(d) Se $L > 0$ é tal que $|b_n| < L$ para todo $n \geq 1$, então $|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < |a_n| \cdot L$. Agora, dado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\epsilon}{L}$. Dessa forma, para $n > n_0$, temos

$$|a_n b_n - 0| < |a_n| \cdot L < \frac{\epsilon}{L} \cdot L = \epsilon,$$

de sorte que $(a_n b_n)_{n \geq 1}$ converge para 0.

(e) Se mostrarmos que $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, seguirá do item (c) que

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Para mostrar que $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, comecemos usando a desigualdade triangular para escrever

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b_n|} \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - |b_n - b|}.$$

Tomando $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ para $n > n_1$, temos, para tais valores de n,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - |b_n - b|} < \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - \frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b|.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| < \epsilon$, isto é, $|b_n - b| < \frac{\epsilon |b|^2}{2}$. Portanto, para $n > n_0$, com

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| < \epsilon$, conforme desejado. $\square$

Os dois exemplos a seguir são importantes em si, mas também ensinam como aplicar as propriedades listadas na proposição anterior.

Exemplo 9. Seja a um real positivo. Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é dada por $a_n = \sqrt[n]{a}$ para todo $n \geq 1$, então $a_n \xrightarrow{n} 1$.

Prova. Se $a > 1$, então $a_n = \sqrt[n]{a} > 1$. Escreva $a_n = 1 + b_n$, de modo que $b_n > 0$. Para $n > 1$, temos

$$a = a_n^n = (1 + b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k > \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} b_n^k = 1 + nb_n.$$

Logo, $1 + nb_n < a$ ou, ainda, $0 < b_n < \frac{a-1}{n}$. Portanto, o Teorema do Confronto (cf. problema 5) garante que $b_n \xrightarrow{n} 0$, e o item (b) da Proposição 8 dá

$$a_n = 1 + b_n \xrightarrow{n} 1 + 0 = 1.$$

Se $0 < a < 1$, então, aplicando a primeira parte da prova a $\frac{1}{a} > 1$, obtemos $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \xrightarrow{n} 1$. Daí, o item (d) da Proposição 8 garante que

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1/\sqrt[n]{a}} \xrightarrow{n} \frac{1}{1} = 1.$$

$\square$

Exemplo 10. A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, dada para $n \geq 1$ por $a_n = \sqrt[n]{n}$, converge para 1.

Prova. Como no exemplo anterior, escreva $a_n = 1 + b_n$ para $n \geq 2$. Uma vez que $b_n > 0$, a fórmula do binômio dá

$$n = a_n^n = (1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 > \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2$$

e, daí,

$$0 < b_n^2 < \frac{2}{n-1}.$$

Assim, novamente pelo Teorema do Confronto, a desigualdade acima garante que $b_n^2 \stackrel{n}{\longrightarrow} 0$, logo (veja o problema 2), $b_n \stackrel{n}{\longrightarrow} 0$. Portanto, $a_n = 1 + b_n \stackrel{n}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1$. $\square$

Para o que segue, chamamos uma vez mais sua atenção para o fato de que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é simplesmente uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, para a qual convencionamos a notação $a_n = f(n)$. Como o domínio $\mathbb{N}$ da sequência é um subconjunto de $\mathbb{R}$, podemos adaptar a definição de função monótona ao caso de sequências, dizendo que $(a_n)_{n\geq 1}$ é **monótona** *crescente* (resp. *decrescente*, *não decrescente*, *não crescente*) se $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$, $a_n \leq a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$), para todo $n \geq 1$.

A seguir, enunciamos e demonstramos um dos resultados mais importante sobre limites de sequências, conhecido como o *Teorema de Bolzano-Weierstrass.* Sua demonstração também pode ser omitida numa primeira leitura.

Teorema 11 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Prova. Suponhamos que $(a_n)_{n\geq 1}$ seja uma sequência monótona não decrescente e limitada, isto é, que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots < M,$$

para algum $M > 0$ (os demais casos podem ser tratados de forma análoga). Então, M é uma cota superior para o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, de sorte que tal conjunto possui uma *menor cota superior* (um *supremo*), que denotaremos por l.

Afirmamos que $a_n \to l$. Para tanto, seja $\epsilon > 0$ dado. Como $l-\epsilon$ não é mais cota superior de A, algum elemento de A é maior que $l-\epsilon$, digamos $a_{n_0} > l-\epsilon$. Mas, como $a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \cdots$, concluímos que $a_n > l-\epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$, temos

$$l - \epsilon < a_n \leq l < l + \epsilon$$

ou, o que é o mesmo, $|a_n - l| < \epsilon$. □

A seguir, discutiremos novamente os dois exemplos anteriores, dessa vez utilizando o Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Exemplo 12. Seja a um real positivo. Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é dada por $a_n = \sqrt[n]{a}$ para todo $n \geq 1$, então $a_n \xrightarrow{n} 1$.

Proof. Assuma que $a > 1$ (o caso $0 < a < 1$ pode ser tratado como no final do Exemplo 9). Então, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a} > 1$, de modo que $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > 1$.

Assim, o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante a existência de $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$, o item (a) da Proposição 5 dá $l \geq 1$ e o item (b) garante que toda subsequência de $(a_n)_{n\geq 1}$ também converge para l.

Em particular, $a_{k(k+1)} \xrightarrow{k} l$. Agora, um pouco de aritmética com raízes, juntamente com o item (d) da Proposição 8, permitem escrever

$$\begin{aligned} a_{k(k+1)} &= \sqrt[k(k+1)]{a} = a^{\frac{1}{k(k+1)}} = a^{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k+1]{a}} \xrightarrow{k} \frac{l}{l} = 1. \end{aligned}$$

Mas, como $a_{k(k+1)} \xrightarrow{k} l$, concluímos[1] que $l = 1$. $\square$

Antes de rediscutir o Exemplo 10, convém observarmos que, conforme pode ser facilmente verificado, a prova do Teorema de Bolzano-Weierstrass e a definição de sequência convergente também asseguram que, se uma sequência limitada for monótona a partir de um determinado termo, então ela ainda será convergente.

Exemplo 13. A sequência $(a_n)_{n \geq 1}$, dada por $a_n = \sqrt[n]{n}$, é convergente e seu limite é igual a 1.

Prova. Os termos iniciais da sequência são $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$, e é fácil verificar diretamente que $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ mas $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}$. Como $2^n \geq n^2$ para $n \geq 4$ (por indução, por exemplo), temos (extraindo raízes $2n$-ésimas) $a_2 = \sqrt{2} \geq \sqrt[n]{n} = a_n > 1$ para $n \geq 4$, de sorte que a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é limitada. Portanto, se mostrarmos que ela é decrescente a partir de seu terceiro termo, sua convergência para um limite $l \geq 1$ seguirá do Teorema de Bolzano-Weierstrass e do item (b) da Proposição 5.

Para o que falta, dado $n > 2$ inteiro, temos

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

A última desigualdade acima é de verificação imediata para $n = 3$; para $n > 3$, basta mostrarmos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. Para tanto, observemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \qquad (1)$$

[1] Aqui, estamos utilizando que, se uma sequência converge, então seu limite é único. Optamos por não demonstrar essa afirmação porque ela é intuitiva (os termos de uma sequência não podem aproximar-se ao mesmo tempo de dois números distintos) e para tornar o texto o mais curto possível.

e, para $k > 1$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}}_{<1} < \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.\end{aligned}$$

Resta mostrarmos que o limite da sequência é 1. Para tal fim, observe inicialmente que a subsequência $a_{2k} = \sqrt[2k]{2k}$ também converge para l. Por outro lado, $\sqrt[2k]{2k} = \sqrt[2k]{2}\cdot\sqrt{\sqrt[k]{k}}$, com $\sqrt[2k]{2} \xrightarrow{k} 1$. Agora, segue do problema 2 que $\sqrt{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k} \sqrt{l}$. Portanto, aplicando o item (b) da Proposição 8, obtemos

$$l = \lim_{k\to+\infty}\sqrt[2k]{2k} = \lim_{k\to+\infty}\sqrt[2k]{2}\cdot\lim_{k\to+\infty}\sqrt{\sqrt[k]{k}} = \sqrt{l}.$$

Resolvendo a equação $l = \sqrt{l}$ e levando em conta que $l \ge 1$, obtemos $l = 1$. $\square$

Vejamos mais um exemplo, que diz que *potências com base variável e expoente fixo crescem mais lentamente do que potências com base fixa e expoente variável.* De outra forma, *crescimento polinomial é mais lento que crescimento exponencial.*

Exemplo 14. Para $k \in \mathbb{N}$ e $|a| > 1$, temos $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$.

Prova. Inicialmente, observe que, pelo exemplo anterior,

$$\sqrt[n]{\frac{n^k}{|a|^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|a|} \xrightarrow{n} \frac{1}{|a|} < 1.$$

Portanto, fixado $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{|a|} < q < 1$, o item (a) da Proposição 5 garante a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{n^k}{|a|^n}} < q$ ou, ainda, $\frac{n^k}{|a|^n} < q^n$. Mas, de acordo com a Proposição 4, temos que $q^n \xrightarrow{n} 0$. Portanto, o Teorema do Confronto (cf. problema 5) garante que o mesmo sucede com $\frac{n^k}{a^n}$. $\square$

O restante desta nota de aula prova um resultado (o Teorema de Weierstrass) que utilizaremos na demonstração de um dos *teoremas de Sturm* sobre EDOs. Ele pode ser omitido numa primeira leitura.

Por vezes, não precisaremos mostrar que uma dada sequência converge, mas somente garantir que ela possui uma subsequência convergente. Nesse sentido, o Teorema 16 dá uma condição suficiente para a existência de uma tal subsequência. Antes, contudo, precisamos de um resultado auxiliar importante em si mesmo, conhecido como o **lema dos intervalos encaixantes**. No que segue, se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo finito, escrevemos $|I|$ para denotar seu comprimento.

Lema 15. *Sejam dados os intervalos* $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, *tais que* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$. *Se* $\lim_{n\to+\infty} |I_n| = 0$, *então existe um único* $l \in \mathbb{R}$ *tal que* $\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{l\}$.

Prova. Note, inicialmente, que a interseção dos I_n é vazia ou unitária. De fato, se existissem reais $a < b$ em tal interseção, teríamos $[a, b] \subset \bigcap_{n\geq 1} I_n$; em particular, $[a, b] \subset I_n$ e, daí, $|I_n| \geq b - a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz o fato de que $|I_n| \to 0$.

Por outro lado, a condição de encaixe $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ garante que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq b_1$, e o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante a existência de $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Afirmamos que $l \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$. Para verificar tal afirmação, observe que $a_n \leq l$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, fixado $m \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq b_m$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o item (b) da Proposição 5 garante que $l = \lim_{n\to+\infty} a_n \leq b_m$. Mas, como o natural m foi escolhido arbitrariamente, temos $l \leq b_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, temos $l \in [a_m, b_m] = I_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, conforme desejado. □

Teorema 16 (Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada tem uma subsequência convergente.*

Prova. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência limitada e $I_0 = [a_0, b_0]$ um intervalo contendo todos os seus termos. Dentre os intervalos $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ e $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$, escolha um que contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, e denote tal intervalo por I_1. Proceda do mesmo modo com I_1, obtendo um intervalo fechado e limitado $I_2 \subset I_1$, tal que $|I_2| = \frac{1}{2}|I_1|$ e I_2 contenha uma infinidade de termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$.

Continuando dessa forma, construímos indutivamente uma sequência $I_1, I_2, I_3, \ldots$ de intervalos fechados e limitados, tais que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$ e I_n contém uma infinidade de termos da sequência, para todo $n \geq 1$. Portanto, pelo lema dos intervalos encaixantes, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{k\geq 1} I_k = \{l\}$.

Para terminar, escolha $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_1} \in I_1$. Em seguida, para cada $j \geq 1$, após ter escolhido $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_j} \in I_j$, tome $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j+1} > n_j$ e $a_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$ (isto é possível, pela definição dos I_j). Dessa forma, construímos uma subsequência $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que $a_{n_k} \in I_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, como $a_{n_k}, l \in I_k$, temos

$$|a_{n_k} - l| \leq |I_k| = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \xrightarrow{k} 0.$$

Portanto, $a_{n_k} \to l$ quando $k \to +\infty$. $\square$

1 Estudo e exercícios

1. * Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências convergentes de números reais, com $a_n \to a$ e $b_n \to b$. Generalize o item (b) da Proposição 5, mostrando que, se $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 1$, então $a \leq b$.

2. * Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de reais positivos convergindo para $a > 0$. Mostre que $\sqrt{a_n} \xrightarrow{n} \sqrt{a}$.

3. * Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| > 1$, mostre que $\frac{a^n}{n!} \to 0$ quando $n \to +\infty$.

4. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências de números reais e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n \in [0, 1]$ um real fixado. Denote por $(c_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por

$$c_n = (1 - t_n)a_n + t_n b_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $a_n, b_n \to l$, prove que $c_n \to l$.

Em alguns exemplos ao longo do texto, utilizamos por vezes o fato de que, se uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfaz $0 < a_n < b_n$, onde $(b_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência que converge para 0, então $(a_n)_{n\geq 1}$ também converge para 0. Esse resultado é um caso particular do **Teorema do Confronto**, que, por sua vez, é o objeto do próximo problema.

5. * Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ e $(c_n)_{n\geq 1}$ sequências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $a_n, c_n \to l$, para algum $l \in \mathbb{R}$, prove que $b_n \to l$.

6. Calcule os limites abaixo:

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2+1}$.

   (b) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+an+b}-n)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   (c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+q^n}$, onde $0 < q < 1$ é um número real.

   (d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, com a e b reais positivos tais que $a > b$.

7. * Este problema estende o conceito de limite de sequências para considerar *limites infinitos*. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais converge para $+\infty$ (resp. $-\infty$) se, dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$ (resp. $a_n < -M$). Nesse caso, denotamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$), $a_n \xrightarrow{n} +\infty$ (resp. $a_n \xrightarrow{n} -\infty$) ou simplesmente $a_n \to +\infty$ (resp. $a_n \to -\infty$). Em relação a esse conceito, e dadas sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ de números reais, faça os seguintes itens:

   (a) Se $a_n \to \pm\infty$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ é limitada, então $a_n+b_n \to \pm\infty$.

   (b) Se $a_n \to \pm\infty$ e $b_n \geq c > 0$ (resp. $b_n \leq c < 0$) para todo $n \geq 1$, então $a_nb_n \to \pm\infty$ (resp. $a_nb_n \to \mp\infty$).

   (c) Se $b_n \to +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $a_n \geq cb_n$ (resp. $a_n \leq -cb_n$), para todo $n \geq 1$, então $a_n \to \pm\infty$.

8. Sejam q um número real e $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência definida por $a_n = q^n$. Se $q > 1$, mostre que $a_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Se $q < -1$, mostre que $(a_n)_{n\geq 1}$ não converge para $+\infty$ ou $-\infty$.

9. Mostre que $\sqrt[n]{n!} \stackrel{n}{\longrightarrow} +\infty$. (Sugestão: dado $M > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > M$. Então, para $n > n_0$, estime $n! = n_0!(n_0+1)(n_0+2)\ldots n > n_0!M^{n-n_0}$, logo, $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\frac{n_0!}{M^{n_0}}} \cdot M > \frac{M}{2}$ para $n \gg 1$, graças ao Exemplo 10.)

10. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função tal que existe $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Pondo $a_n = f(n)$, prove que $a_n \to l$.

11. Use o resultado do problema anterior para mostrar que, fixado $\alpha > 0$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}} = 0.$$