15. Convergência de Séries

Prof. Antonio Caminha*

25 de maio de 2022

Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de números reais, definimos a **série** $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, ou simplesmente $\sum_{k\geq 1} a_k$, como a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$, onde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ para $n \geq 1$. O número real s_n é denominado a ***n*-ésima soma parcial** da série $\sum_{k\geq 1} a_k$, e dizemos que a série **converge** se a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ de suas somas parciais converge para algum $s \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que o real s é a **soma** da série e escrevemos

$$\sum_{k\geq 1} a_k = s. \tag{1}$$

Em outras palavras, quando escrevemos $\sum_{k\geq 1} a_k = s$, estamos dizendo que as somas finitas $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ aproximam-se mais e mais do número real s, à medida que $n \to +\infty$. É nesse sentido que a igualdade (1) deve ser pensada, *como um limite de sequência*.

Algumas vezes, teremos uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ de números reais, em cujo caso a série correspondente será denotada por $\sum_{k\geq 0} a_k$. Podemos lidar com essas séries da mesma maneira pela qual lidaremos com séries da forma $\sum_{k\geq 1} a_k$, e deixamos para você a tarefa de se convencer desse fato.

Nosso interesse primordial é encontrar critérios que permitam decidir se uma dada série converge ou não. Caso não convirja, diremos que se trata de uma série **divergente**.

Comecemos examinando o caso de uma **série geométrica**, isto é, uma série da forma $\sum_{k\geq 1} q^{k-1}$, para um certo real não nulo q. Conforme veremos ao longo desta nota e em notas futuras, séries geométricas são, sob vários aspectos, fundamentais para o desenvolvimento da teoria de EDOs.

Proposição 1. *Dado um real não nulo q, a série geométrica $\sum_{k\geq 1} q^{k-1}$ converge se, e só se, $0 < |q| < 1$. Nesse último caso, sua soma é igual a $\frac{1}{1-q}$.*

Prova. Sendo $s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$, segue da fórmula para a soma dos termos de uma PG que

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Agora, se $0 < |q| < 1$, sabemos que $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. Portanto, temos

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q}.$$

Por outro lado, se $|q| \geq 1$, então $\lim_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$, de forma que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ não converge em $\mathbb{R}$. Portanto, nesse caso a série geométrica em questão é divergente. $\square$

O próximo resultado ensina como operar com séries convergentes.

Proposição 2. *Se $\sum_{k\geq 1} a_k$ e $\sum_{k\geq 1} b_k$ são séries convergentes e c é um número real qualquer, então:*

(a) *A série* $\sum_{k\geq 1} ca_k$ *converge e* $\sum_{k\geq 1} ca_k = c\sum_{k\geq 1} a_k$.

(b) *A série* $\sum_{k\geq 1}(a_k+b_k)$ *converge e* $\sum_{k\geq 1}(a_k+b_k) = \sum_{k\geq 1} a_k + \sum_{k\geq 1} b_k$.

Prova.
(a) Se s_n é a n-ésima soma parcial da série $\sum_{k\geq 1} a_k$, então a n-ésima soma parcial da série $\sum_{k\geq 1} ca_k$ é

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cs_n.$$

Uma vez que a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge, temos por definição que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ converge. Então, o item (a) da Proposição 8 da nota *Convergência de Sequências* garante que a sequência $(cs_n)_{n\geq 1}$ converge, com $\lim_{n\to+\infty} cs_n = c\lim_{n\to+\infty} s_n$. Assim, a série $\sum_{k\geq 1} ca_k$ converge, com

$$\sum_{k\geq 1} ca_k = \lim_{n\to+\infty} cs_n = c\lim_{n\to+\infty} s_n = c\sum_{k\geq 1} a_k.$$

(b) Se $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ são, respectivamente, as n-ésimas somas parciais das séries $\sum_{k\geq 1} a_k$ e $\sum_{k\geq 1} b_k$, então a $n-$ésima soma parcial da série $\sum_{k\geq 1}(a_k + b_k)$ é

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = s_n + t_n.$$

Como as séries $\sum_{k\geq 1} a_k$ e $\sum_{k\geq 1} b_k$ convergem, temos por definição que as sequências $(s_n)_{n\geq 1}$ e $(t_n)_{n\geq 1}$ convergem. Portanto, o item (b) da Proposição 8 da nota *Convergência de Sequências* garante que a sequência $(s_n + t_n)_{n\geq 1}$ converge, com $\lim_{n\to+\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n$. Assim, a série $\sum_{k\geq 1}(a_k + b_k)$ converge, com

$$\sum_{k\geq 1}(a_k+b_k) = \lim_{n\to+\infty}(s_n+t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{k\geq 1} a_k + \sum_{k\geq 1} b_k.$$

□

Exemplo 3. *Decida se a série* $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1^k+2^k+3^k}{4^k}\right)$ *converge e, se convergir, calcule sua soma.*

Solução. Como

$$\frac{1^k+2^k+3^k}{4^k}=\frac{1^k}{4^k}+\frac{2^k}{4^k}+\frac{3^k}{4^k}=\left(\frac{1}{4}\right)^k+\left(\frac{2}{4}\right)^k+\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

e $0<\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4}<1$, a Proposição 1 garante a convergência das séries geométricas $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{4}\right)^k$, $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ e $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$. Portanto, aplicando duas vezes o item (b) da proposição anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1^k+2^k+3^k}{4^k}\right)&=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^k\\&=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{13}{3}.\end{aligned}$$

□

Dada uma série $\sum_{k\geq 1}a_k$, nos referimos a a_n como o **termo geral** ou, ainda, o ***n*-ésimo termo** da série. A proposição a seguir dá uma condição *necessária* para a convergência de uma série em função de seu termo geral.

Proposição 4. *Se a série* $\sum_{k\geq 1}a_k$ *é convergente, então* $a_n\to 0$.

Prova. Sendo $s_n=\sum_{k\geq 1}^n a_k$ a n-ésima soma parcial da série e $s=\sum_{k\geq 1}a_k$, temos para $n>1$ que

$$a_n=\sum_{k=1}^n a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=s_n-s_{n-1}\xrightarrow{n}s-s=0.$$

□

A recíproca da proposição anterior não é válida, isto é, há séries divergentes $\sum_{k\geq 1} a_k$ para as quais $a_n \xrightarrow{n} 0$. O exemplo clássico é fornecido pela **série harmônica** $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$, cuja divergência será estabelecida logo mais. Antes, contudo, precisamos de um critério para a convergência de séries de termos não negativos.

Proposição 5. *Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de termos não negativos, então $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge se, e só se, a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ de suas somas parciais é limitada.*

Prova. Inicialmente, recorde que, por definição, $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge se, e só se, $(s_n)_{n\geq 1}$ converge. Como já sabemos que toda sequência convergente é limitada, concluímos que, se $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge, então $(s_n)_{n\geq 1}$ é limitada.

Reciprocamente, suponha que $(s_n)_{n\geq 1}$ é limitada. Como $a_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$, temos que $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots$. Portanto, $(s_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona e limitada, logo, convergente (pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass). □

Exemplo 6. *A série harmônica $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge.*

Prova. Seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pela proposição anterior, é suficiente provar que a sequência $(s_n)_{n\geq 1}$ é ilimitada. Para tanto, observe que, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 &\Rightarrow \int_1^{1+\frac{1}{k}} \frac{1}{x}dx < \int_1^{1+\frac{1}{k}} dx \\ &\Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \Rightarrow \log\left(\frac{k+1}{k}\right) < \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k) \\ &= \log(n+1) \xrightarrow{n} +\infty. \end{aligned}$$

Então, $(s_n)_{n\geq 1}$ é realmente ilimitada. $\square$

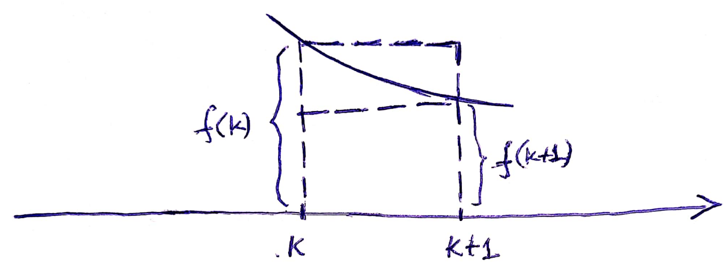
O resultado a seguir traz um critério de convergência para séries de termos positivos que estende amplamente o argumento apresentado na demonstração do exemplo anterior. Ele é conhecido como o **teste da integral** para convergência de séries.

Teorema 7 (teste da integral)**.** *Sejam dados $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma função não-crescente $f : [n_0, +\infty) \to (0, +\infty)$, tal que $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$. Então,*

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{k \geq n_0} f(k) \text{ converge.}$$

A demonstração a seguir pode ser omitida numa primeira leitura, mas a ideia central está contida na figura. Nela, calculando áreas, concluímos que

$$f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$



Prova. Suponha que $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, e seja $g : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada, no intervalo $[k, k+1)$ (para cada $k \geq n_0$), por $g(x) = f(k+1)$.

Como f é não crescente, temos, para $k \leq x < k+1$ (com $k \geq n_0$), que $g(x) = f(k+1) \leq f(x)$. Então, $0 \leq g(x) \leq f(x)$, para todo $x \geq n_0$. Portanto, segue do critério de comparação para integrais impróprias[1] que $\int_{n_0}^{+\infty} g(t)\,dt$ também converge.

Por outro lado, para um inteiro $n > n_0$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{n} g(t)\,dt &= \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} g(t)\,dt = \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(k+1)dt \\ &= \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k).\end{aligned}$$

[1]Grosso modo, esse critério diz o seguinte fato plausível: se $f, g : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$ são tais que $f(x) \leq g(x)$ e a área abaixo do gráfico de f e acima do eixo dos x é finita, então a área abaixo do gráfico de g e acima do eixo dos x também é finita.

Então,

$$\int_{n_0}^{+\infty} g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{n_0}^{n} g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k)$$
$$= \sum_{k\geq n_0+1} f(k).$$

Mas, como a diferença entre $\sum_{k\geq n_0+1} f(k)$ e $\sum_{k\geq n_0} f(k)$ é só o termo $f(n_0)$, concluímos que $\sum_{k\geq n_0} f(k)$ também converge.

Suponha, agora, que a série $\sum_{k\geq n_0} f(k)$ converge, e considere a função $h:[n_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada no intervalo $[k,k+1)$ (para cada $k\geq n_0$ inteiro), por $h(x)=f(k)$. Como

$$\int_{n_0}^{+\infty} h(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{n_0}^{n} h(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) = \sum_{k\geq n_0} f(k)$$

e a última série converge, concluímos que $\int_{n_0}^{+\infty} h(t)\,dt$ converge.

Agora, o fato de f ser não crescente garante que $0\leq f(x)\leq h(x)$, para todo $x\geq n_0$. Então, novamente pelo critério de comparação para integrais impróprias, a convergência de $\int_{n_0}^{+\infty} h(t)\,dt$ acarreta aquela de $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$. $\square$

Exemplo 8. *Se $r>1$ é um número real, então a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^r}$ converge.*

Prova. Tomando $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{x^r}$, segue de $r>1$ que

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{t^r}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{1}{t^r}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{x^{r-1}}-1\right) = \frac{1}{r-1}.$$

Portanto, pelo teste da integral, a série $\sum_{k\geq 1} f(k)$ converge. Mas essa série é exatamente a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^r}$. $\square$

Observação 9. Em relação ao exemplo anterior, apesar de termos garantido que a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^r}$ converge quando $r>1$, não temos a mínima ideia sobre o valor numérico exato de sua soma. Essa é uma situação recorrente para séries, e não deve dar ao leitor a sensação de que a teoria que está sendo desenvolvida é, de alguma forma, deficiente ou inútil. Pelo contrário, veremos que a simples garantia da convergência de uma série (que é uma conclusão meramente *qualitativa*) pode gerar consequências *quantitativas* importantes.

Ainda em relação ao exemplo anterior, pode ser mostrado, com o auxílio da teoria das *séries de Fourier*, que $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (veja o capítulo 6 de [2]). Contudo, calcular o valor exato de $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$ é um problema em aberto!

O exemplo a seguir traz outra aplicação do teste da integral.

Exemplo 10. *Decida, com justificativa, se a série* $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\log k}$ *converge.*

Solução. Se $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ é a função dada por $f(x)=\frac{1}{x\log x}$, então f é decrescente e tal que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Pelo teste da integral, $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\log k}$ converge se, e só se, $\int_2^{+\infty}f(t)\,dt$ também converge.

Para o que falta, a substituição de variável $s=\log t$ fornece $ds=\frac{1}{t}\,dt$, logo,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}f(t)\,dt &= \int_2^{+\infty}\frac{1}{t\log t}\,dt=\int_{\log 2}^{+\infty}\frac{1}{s}\,ds\\ &= \lim_{s\to+\infty}(\log s-\log 2)=+\infty.\end{aligned}$$

Portanto, $\int_2^{+\infty}f(t)\,dt$ diverge, de sorte que $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\log k}$ também diverge. $\square$

A definição a seguir isola uma classe de séries cuja convergência, em princípio, é mais fácil de ser estabelecida.

Definição 11. *Uma série* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é* **absolutamente convergente** *se a série* $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ *é convergente.*

A utilidade do conceito de série absolutamente convergente é evidenciada no próximo resultado, cuja demonstração será omitida.

Proposição 12. *Se* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é uma série absolutamente convergente, então* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é convergente e vale que*

$$\left|\sum_{k\geq 1} a_k\right| \leq \sum_{k\geq 1} |a_k|.$$

Em resumo, a definição e a proposição anteriores dizem simplesmente que

$$\sum_{k\geq 1} |a_k| \text{ converge } \Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k \text{ converge.} \tag{2}$$

O nome *absolutamente convergente* dado às séries $\sum_{k\geq 1} a_k$ tais que $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ converge é simplesmente uma *abreviação* mais curta para (2).

A recíproca da proposição anterior não é válida, quer dizer, *há séries convergentes que não são absolutamente convergentes.* Antes de podermos apresentar um exemplo, precisamos de resultado conhecido como o **critério de Leibniz** para convergência de séries.

Proposição 13 (Leibniz)**.** *Se* $(a_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência não crescente de reais positivos, tal que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*, então a série* $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}a_k$ *é convergente.*

Prova. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. A condição $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots > 0$ garante facilmente (verifique isto!) que

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \ldots \geq s_6 \geq s_4 \geq s_2. \tag{3}$$

Por outro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$|s_{2m-1} - s_{2m}| = |-a_{2m}| = a_{2m} \xrightarrow{m} 0.$$

Junto com (3), essa convergência garante claramente que as subsequências $(s_{2m})_{m\geq 1}$ e $(s_{2m-1})_{m\geq 1}$ de $(s_n)_{n\geq 1}$ convergem para um mesmo limite, digamos l. Mas, como todo termo de $(s_n)_{n\geq 1}$ é termo de uma dessas subsequências, segue que $(s_n)_{n\geq 1}$ também converge para l, conforme desejado. $\square$

Exemplo 14. *Pelo critério de Leibniz, a série*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

converge. Por outro lado, tal série não é absolutamente convergente, uma vez que

$$\sum_{k\geq 1} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$$

é a série harmônica, que já sabemos ser divergente.

A importância do conceito das séries absolutamente convergentes reside no resultado a seguir, conhecido como o **teste da comparação** para a convergência absoluta de séries. Também omitiremos sua demonstração.

Proposição 15 (teste da comparação)**.** *Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências de números reais tais que $|a_n| \leq b_n$, para todo $n \geq 1$.*

Se $\sum_{k\geq 1} b_k$ *converge, então* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é absolutamente convergente e tal que*

$$\left|\sum_{k\geq 1} a_k\right| \leq \sum_{k\geq 1} b_k.$$

Prova. Sejam $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ e $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Como $|a_k| \leq b_k$ para todo $k \geq 1$, temos $s_n \leq t_n$ para todo $n \geq 1$. Se $\sum_{k\geq 1} b_k = t$, então $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq \ldots \to t$, de forma que $s_n \leq t$ para todo $n \geq 1$. Como $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq t$, segue que $(s_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona e limitada, logo, convergente. Então, $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ é convergente, com

$$\sum_{k\geq 1} |a_k| = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sup\{s_n;\, n \geq 1\} \leq t = \sum_{k\geq 1} b_k.$$

Por fim, já sabemos que $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge, com $\left|\sum_{k\geq 1} a_k\right| \leq \sum_{k\geq 1} |a_k|$. Então, combinando as duas desigualdades acima, obtemos $\left|\sum_{k\geq 1} a_k\right| \leq \sum_{k\geq 1} b_k$. $\square$

Exemplo 16. *Mostre que a série* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k^2-3k-8}$ *converge.*

Prova. Veja que

$$2k^2 - 3k - 8 > k^2 \Leftrightarrow k^2 - 3k - 8 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{3+\sqrt{41}}{2}.$$

Como $\frac{3+\sqrt{41}}{2} < \frac{3+\sqrt{49}}{2} = 5$, concluímos que

$$k \geq 5 \Rightarrow 2k^2 - 3k - 8 > k^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2k^2-3k-8} < \frac{1}{k^2}.$$

Portanto, pelo critério de comparação, a convergência da série $\sum_{k\geq 5} \frac{1}{2k^2-3k-8}$ segue da convergência da série $\sum_{k\geq 5} \frac{1}{k^2}$. Logo, a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k^2-3k-8}$ também converge. $\square$

Exemplo 17. *Existe uma sequência* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de números reais positivos tal que ambas as séries* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *e* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2 a_k}$ *convirjam? Justifique sua resposta!*

Solução. Não existe! Se existisse, o item (b) da Proposição 2 garantiria a convergência da série $\sum\limits_{k\geq 1} \left(a_k + \frac{1}{k^2 a_k}\right)$. Mas, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$a_k + \frac{1}{k^2 a_k} \geq 2\sqrt{a_k \cdot \frac{1}{k^2 a_k}} = \frac{2}{k},$$

de forma que o teste da comparação garantiria a convergência da série $\sum_{k\geq 1} \frac{2}{k}$, o que é um absurdo. □

Continuando, apresentamos uma consequência muito útil do teste da comparação, a qual dá uma condição *suficiente* para a convergência absoluta de uma série de termos não nulos. Ela é conhecida como o **teste da razão**.

Proposição 18 (teste da razão)**.** *Seja* $(a_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de termos não nulos, tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$*. Se* $l < 1$*, a série* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é absolutamente convergente; se* $l > 1$*, a série* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é divergente.*

Prova. Provemos inicialmente que, se $l < 1$, a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ é absolutamente convergente. Sendo $l < 1$, podemos tomar um número real q tal que $l < q < 1$. Então,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n} l < q \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q, \text{ para } n \gg 1,$$

digamos $n \geq n_0$. Portanto, para $n \geq n_0$, temos

$$|a_n| = |a_{n_0}| \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq |a_{n_0}| \prod_{k=n_0}^{n-1} q = |a_{n_0}| q^{n-n_0}.$$

Assim, para $n \geq n_0$, os termos da série $\sum_{k\geq 1}|a_k|$ são majorados pelos termos da série $\sum_{k\geq 1}|a_{n_0}|q^{n-n_0}$, a qual converge, pelas proposições 2 e 1. Portanto, segue do teste da comparação que $\sum_{k\geq 1} a_k$ é absolutamente convergente.

Se $l > 1$, tome um real q tal que $1 < q < l$ e, como acima, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq q$. Então, também como acima, temos $|a_n| \geq |a_{n_0}|q^{n-n_0}$ para $n \geq n_0$. Mas, sendo esse o caso, temos que $a_n \not\to 0$ quando $n \to +\infty$, e a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ diverge, pela Proposição 4. $\square$

Observação 19. Nas notações da proposição anterior, se $l = 1$, a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ pode convergir ou divergir. De fato, para $a_n = \frac{1}{n}$ temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n} 1,$$

mas a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ diverge; por outro lado, para $a_n = \frac{1}{n^2}$ temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n} 1,$$

mas a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge.

Exemplo 20. *Dados um natural m e um real $q > 1$, a série $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{k^m}{q^k}$ converge ou diverge? Justifique sua resposta.*

Solução. Fazendo $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n^m}{q^n}$ para $n \geq 1$, temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^m}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{n^m} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^m \cdot \frac{1}{q} \xrightarrow{n} 1^m \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1.$$

Portanto, pelo teste da razão, a série dada é absolutamente convergente, logo, convergente. $\square$

O resultado a seguir será particularmente útil no estudo de séries de potências.

Teorema 21 (teste da raiz)**.** *Seja* $(a_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de reais tal que* $\sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{n}{\longrightarrow} l$*.*

(*a*) *Se* $l < 1$*, então a série* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é absolutamente convergente.*

(*b*) *Se* $l > 1$*, então a série* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *é divergente.*

(*c*) *Se* $l = 1$*, então a série* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *pode convergir ou divergir.*

Prova.
(a) Tome $q \in \mathbb{R}$ tal que $l < q < 1$. Como $\sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{n}{\longrightarrow} l < q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < q$, isto é $|a_n| < q^n$. Portanto, a série $\sum_{k\geq n_0} |a_k|$ é dominada pela série $\sum_{k\geq n_0} q^k$, a qual converge, uma vez que $0 < q < 1$. Então, $\sum_{k\geq n_0} a_k$ é absolutamente convergente. Mas aí, é claro que $\sum_{k\geq 1} a_k$ também o é.

(b) Tome $q \in \mathbb{R}$ tal que $1 < q < l$. Como $\sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{n}{\longrightarrow} l > q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > q$, isto é $|a_n| > q^n$. Então, o fato de ser $q > 1$ garante que $|a_k| \not\to 0$ quando $k \to +\infty$. Mas aí, também temos que $a_k \not\to 0$, de sorte que a série $\sum_{k\geq 1} a_k$ não pode convergir.

(c) Exercício (veja o problema 12). □

Terminamos apresentando um resultado sobre o produto de duas séries absolutamente convergentes. Uma vez mais, não discutiremos a demonstração correspondente, a qual pode ser encontrada em [1].

Teorema 22. *Sejam* $\sum_{k\geq 0} a_k$ *e* $\sum_{k\geq 0} b_k$ *séries absolutamente convergentes. Se* $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *para* $n \geq 0$*,* *então* $\sum_{k\geq 0} c_k$ *é absolutamente convergente e tal que*

$$\sum_{k\geq 0} c_k = \left(\sum_{k\geq 0} a_k\right)\left(\sum_{k\geq 0} b_k\right).$$

1 Estudo e exercícios

1. Prove que a série $\sum_{k\geq 1}(-1)^k$ diverge.

2. Dado um número real $a > 1$, prove que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{2k-1}{a^k}$ é convergente e calcule sua soma. (Sugestão: faça $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{a^k}$ e, em seguida, mostre que

$$\begin{aligned}(a-1)s_n &= as_n - s_n\\ &= a + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{a^n}\\ &= a + \frac{2a}{a-1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^n}\right) - \frac{2n-1}{a^n}.)\end{aligned}$$

3. Decida se a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$ converge ou diverge. (Sugestão: inicialmente, note que $\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}} < \sqrt{2k}$, de forma que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} > \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{2k}}$. Agora, como $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$, use o teste da comparação para mostrar que a série dada diverge.)

4. Prove que a série $\sum_{k>1000} \frac{1}{\sqrt{k^3-1000k^2}}$ converge. (Sugestão: mostre inicialmente que $n^3 - 1000n^2 > (n-500)^3$ para todo n suficientemente grande; em seguida, use o teste da comparação, juntamente com a convergência da série $\sum_{k>500} \frac{1}{(k-500)^{3/2}}$.)

5. A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PA não constante de reais positivos. Prove que a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$ converge e calcule sua soma. (Sugestão: inicialmente, se r é a razão da PA, use a fórmula para o termo geral de uma PA para concluir que $r > 0$. Em seguida, escreva $\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ para obter $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \frac{n-1}{a_1a_n}$.)

6. Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PA infinita e não constante de termos positivos, prove que:

   (a) a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{a_k}$ é divergente.

   (b) a série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{a_{2^k}}$ é convergente.

   (Sugestão: seja $r > 0$ a razão da PA. Para o item (a), temos $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1+(n-1)r} > \frac{1}{2(n-1)r}$ se $n > \frac{a_1}{r} + 1$. Para o item (b), temos $\frac{1}{a_{2^n}} = \frac{1}{a_1+(2^n-1)r} < \frac{1}{(2^n-1)r} \leq \frac{1}{2^{n-1}r}$. Aplique, agora, o teste da comparação.)

7. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais positivos tal que a série $\sum_{k\geq 1}a_k^2$ converge. Prove que, para todo real $r > \frac{1}{2}$, a série $\sum_{k\geq 1}\frac{a_k}{k^r}$ também converge. (Sugestão: note que $a_n^2 + \frac{1}{n^{2r}} \geq \frac{2a_n}{n^r}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, aplique o resultado do Exemplo 8, juntamente com o teste da comparação.)

8. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais positivos tal que a série $\sum_{k\geq 1}a_k$ converge. Prove que $\sum_{k\geq 1}\sqrt{a_ka_{k+1}}$ também converge. (Sugestão: use o teste da comparação, juntamente com o fato de que $\sqrt{a_na_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.)

9. Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ a **sequência de Fibonacci**, i.e., a sequência tal que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, para todo inteiro $k \geq 1$. Mostre que a série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{F_k}$ converge. (Sugestão: impondo que $F_j \geq \alpha^j$, para todo $j \leq k+1$, deduza que $F_{k+2} \geq \alpha^{k+2}$ se $\alpha + 1 \geq \alpha^2$. A partir daí, mostre que $F_n \geq \alpha^n$, para todo $n \geq 3$, onde $\alpha = \min\{\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$. Por fim, note que $\alpha > 1$ e aplique o teste da comparação.)

10. Estabeleça a divergência da série harmônica aplicando diretamente o teste da integral.

11. Examine a convergência das séries abaixo, onde $\alpha > 0$ é um real dado:

    (a) $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(\log k)^\alpha}$.

    (b) $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\log k)^\alpha}$.

    (c) $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\log k)(\log\log k)^\alpha}$.

    (Sugestão: aplique o teste da integral às funções $\frac{1}{(\log x)^\alpha}$, $\frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ e $\frac{1}{x(\log x)(\log\log x)^\alpha}$.)

12. Dê exemplo de uma série convergente (resp. divergente) $\sum_{k\geq 1} a_k$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n} 1$.

13. Mostre que a série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(\log k)^k}$ converge. (Sugestão: use o teste da raiz.)

Referências

[1] A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção Profmat, SBM, Rio de Janeiro, 2014.

[2] G. F. Simmons. *Differential Equations With Applications and Historical Notes*, terceira edição. CRC Press, Boca Raton, 2017.