

16. Séries de Potências

Prof. Antonio Caminha*

2 de junho de 2022

Uma estratégia importante para a obtenção de soluções para certas EDOs de segunda ordem da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

num intervalo do tipo $(-\alpha, \alpha)$, é tentar escrever $y = y(x)$ como uma *série de potências*

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

Se as funções $p, q, r : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ também puderem ser escritas como séries de potências, então, após substituir as expressões para y, p, q, r na EDO e igualar coeficientes de cada potência de x dos dois lados dela, obteremos um *sistema linear infinito de equações*, que nos permitirá calcular sucessivamente os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots$ e, assim, obter o candidato y a solução.

Para implementar essa estratégia de forma coerente, precisamos estudar um pouco sobre séries de potências, e faremos isto

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

aqui. Não demonstraremos todos os resultados, mas os enunciaremos de forma precisa e mostraremos como utilizá-los. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [1] ou [2].

Definição 1. *Uma série de potências é uma série da forma*

$$\sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k, \quad (1)$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots$ são números reais dados. Como no caso de séries numéricas, dizemos que $a_n(x - x_0)^n$ é o **n -ésimo termo** da série de potências (1) e que a_n é o **n -ésimo coeficiente** da série. Também, dizemos que a série (1) é **centrada em x_0** .

Estamos interessado em entender o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que a série (1) converge. Um desses é, evidentemente, $x = x_0$, e o resultado a seguir explica o que acontece em geral.

Teorema 2. *Dada a série de potências $\sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$, existe $0 \leq R \leq +\infty$ tal que a série converge absolutamente em $(x_0 - R, x_0 + R)$ e diverge fora de $[x_0 - R, x_0 + R]$.*

Prova. Note primeiramente que a série $\sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$ converge absolutamente no intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ se, e só se, a série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge absolutamente no intervalo $(-R, R)$. Portanto, para simplificar a notação, podemos supor que $x_0 = 0$.

Afirmção 1: se a série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ é convergente quando $x = \alpha \neq 0$, então ela é absolutamente convergente, qualquer que seja $x \in (-\alpha, \alpha)$.

De fato, para um tal x , temos

$$\sum_{k \geq 0} |a_k x^k| = \sum_{k \geq 0} |a_k \alpha^k| \left| \frac{x}{\alpha} \right|^k. \quad (2)$$

Mas, como $\sum_{k \geq 0} a_k \alpha^k$ converge, sabemos que $a_n \alpha^n \xrightarrow{n} 0$, logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n \alpha^n| < 1;$$

portanto, segue de (2) que

$$k \geq n_0 \Rightarrow |a_k \alpha^k| \left| \frac{x}{\alpha} \right|^k \leq \left| \frac{x}{\alpha} \right|^k.$$

Então, uma vez que a série geométrica $\sum_{k \geq n_0} \left| \frac{x}{\alpha} \right|^k$ é convergente (pois $\left| \frac{x}{\alpha} \right| < 1$), o teste da comparação garante que o mesmo se passa com $\sum_{k \geq n_0} |a_k x^k|$ e, assim, com $\sum_{k \geq 0} |a_k x^k|$.

Afirmção 2: se a série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ é divergente quando $x = \beta \neq 0$, então ela é divergente, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > |\beta|$.

Realmente, para um tal x , se a série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ convergisse, então, pela afirmação anterior, tal convergência acarretaria a convergência absoluta (logo, a convergência) da série $\sum_{k \geq 0} a_k \beta^k$, o que é um absurdo.

As afirmações 1 e 2 garantem que uma das três possibilidades a seguir ocorre: (i) a série só converge quando $x = 0$; (ii) a série converge absolutamente, para todo $x \in \mathbb{R}$; (iii) existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha < \beta$ e a série converge absolutamente quando $|x| < \alpha$ e diverge quando $|x| > \beta$.

Se um dos casos (i) ou (ii) ocorrer, nada mais há a fazer.

Se (iii) ocorrer, então já sabemos que a série de potências converge absolutamente em $(-\alpha, \alpha)$ e diverge fora de $[-\beta, \beta]$. A ideia, então, é *aumentar* o intervalo $(-\alpha, \alpha)$ paulatinamente, enquanto a série convergir, até chegar a um intervalo maximal

em que ela convirja; esse intervalo maximal será o intervalo de convergência.

Tecnicamente, a maneira correta de tomar esse intervalo maximal é definir

$$R = \sup\{r > 0; \sum_{k \geq 0} a_k u^k \text{ converge absolutamente se } |u| < r\}.$$

Tal definição tem sentido por sabermos que a série de potências diverge em β , de forma que $R \leq \beta$.

Com R definido como acima, afirmamos que $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge absolutamente quando $|x| < R$ e diverge quando $|x| > R$. Para tanto, consideremos dois casos separadamente:

(i) Se $|x| < R$, tome r tal que $|x| < r < R$ e $\sum_{k \geq 0} a_k u^k$ converge absolutamente quando $|u| < r$. Então, em particular, $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge absolutamente.

(ii) Se $|x| > R$ mas $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge, então a afirmação 1 garante que $\sum_{k \geq 0} a_k u^k$ converge absolutamente quando $|u| < |x|$. Mas isso claramente contradiz a definição de R . Logo, $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ diverge. $\square$

Nas notações do teorema anterior, dizemos que $0 \leq R \leq +\infty$ é o **raio de convergência** e $(x_0 - R, x_0 + R)$ é o **intervalo de convergência** da série de potências (1).

O corolário do teorema anterior demonstrado a seguir mostra que, em certas circunstâncias, podemos calcular facilmente o raio de convergência de uma série de potências.

Corolário 3. *Seja $(a_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de reais não nulos. Se existe $0 \leq R \leq +\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$, então a série de potências $\sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$ tem raio de convergência R .*

Prova. Como

$$\left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = \frac{|x-x_0|}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} \xrightarrow{n} \frac{|x-x_0|}{R},$$

o teste da razão garante que a série $\sum_{k \geq 0} a_k(x-x_0)^k$ converge absolutamente se $\frac{|x-x_0|}{R} < 1$ e diverge se $\frac{|x-x_0|}{R} > 1$. Assim, a série converge absolutamente se $|x-x_0| < R$ e diverge se $|x-x_0| > R$, logo, tem raio de convergência R . $\square$

Exemplo 4.

- (a) A série de potências $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} x^k$ tem raio de convergência 1, uma vez que $\left| \frac{1/n}{1/(n+1)} \right| = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n} 1$.
- (b) A série $\sum_{k \geq 1} k! x^k$ tem raio de convergência 0, pois $\left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n} 0$.
- (c) A série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} (x-2)^k$ tem raio de convergência $+\infty$, pois $\left| \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right| = n+1 \xrightarrow{n} +\infty$.
- (d) O corolário anterior não se aplica à série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} x^{2^k}$, uma vez que ela tem infinitos termos com coeficientes iguais a 0.
- (e) Dado $\alpha \neq 0$, a série $\sum_{k \geq 0} (\alpha x)^k$ tem raio de convergência $\frac{1}{|\alpha|}$, pois $\left| \frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1}} \right| = \frac{1}{|\alpha|}$, para todo $n \geq 0$. Para $|x| < \frac{1}{|\alpha|}$, já sabemos que

$$\sum_{k \geq 0} (\alpha x)^k = \frac{1}{1 - \alpha x}. \quad (3)$$

A seguir, colecionamos outro resultado muito importante sobre séries de potências, o qual é fundamental para a aplicação das mesmas a EDOs.

Teorema 5. *Se a série de potências $\sum_{k \geq 0} a_k(x - x_0)^k$ tem raio de convergência $R > 0$, e $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por*

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k(x - x_0)^k,$$

então f é derivável e integrável. Além disso, para todo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, tem-se:

(a) $f'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k(x - x_0)^{k-1}.$

(b) $\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$

Em palavras, o teorema anterior diz que uma série de potências com raio de convergência $R > 0$ pode ser derivada e integrada termo a termo, e que os resultados são séries de potências com raios de convergência maiores ou iguais a R . De fato, admitindo a validade do teorema, é quase imediato mostrar que as séries dos segundos membros dos itens (a) e (b) também têm raios de convergência iguais a R . A esse respeito, veja o problema 2.

O corolário a seguir refina o item (a) do teorema anterior.

Corolário 6. *Se a série de potências $\sum_{k \geq 0} a_k(x - x_0)^k$ tem raio de convergência $R > 0$, e $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por*

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k(x - x_0)^k,$$

então f é infinitamente derivável e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k \geq n} \frac{k! a_k}{(k - n)!} (x - x_0)^{k-n}, \quad (4)$$

para todo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Em particular,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n \geq 0.$$

Prova. O teorema anterior dá o caso $n = 1$ e garante que a série de potências $\sum_{k \geq 1} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ tem raio de convergência maior ou igual a R .

Suponha, por hipótese de indução, que f é m vezes derivável, com

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k \geq m} \frac{k! a_k}{(k - m)!} (x - x_0)^{k-m},$$

e que essa última série também tem raio de convergência maior ou igual a R . Então, novamente pelo teorema anterior, $f^{(m)}$ é derivável e a série de potências que define $(f^{(m)})' = f^{(m+1)}$ tem raio de convergência maior ou igual a R , com

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \sum_{k \geq m+1} \frac{k! a_k}{(k - m)!} \cdot (k - m)(x - x_0)^{k-m-1} \\ &= \sum_{k \geq m+1} \frac{k! a_k}{(k - (m + 1))!} (x - x_0)^{k-(m+1)}. \end{aligned}$$

Para o que falta, segue de (4) que

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{n! a_n}{(n - n)!} = n! a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

□

Nas notações do corolário anterior, a expansão em série de potências de $f^{(n)}$ é obtida *derivando termo a termo*, n vezes, a expansão de f em série de potências. Realmente, denotando a n -ésima derivada de uma função por $\frac{d^n}{dx^n}$, um cálculo imediato fornece

$$\frac{d^n}{dx^n} (x - x_0)^k = \begin{cases} 0, & \text{se } k < n \\ \frac{k!}{(k-n)!} (x - x_0)^{k-n}, & \text{se } k \geq n \end{cases}.$$

Também, a série de potências é precisamente a *série de Taylor* da função f .

Exemplo 7. O item (e) do Exemplo 4 garante que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k,$$

com raio de convergência igual a 1. Portanto, o item (b) do Teorema 5 garante que, também para $|x| < 1$, tem-se

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k \geq 0} \int_0^x (-1)^k t^k dt = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

Exemplo 8. A respeito da função $\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, observe que, para $|x| < 1$, tem-se

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{2k}.$$

Portanto, segue do Teorema 5 que, para $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} \text{arctg } x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{k \geq 0} \int_0^x (-1)^k t^{2k} dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

O problema 7 garante que a igualdade acima continua verdadeira para $x = 1$.

Exemplo 9. Pelo Corolário 3, a série de potências $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} x^k$ tem raio de convergência $+\infty$. Se $f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} x^k$ para $x \in \mathbb{R}$, o item (a) do Teorema 5 dá

$$f'(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} x^k = f(x).$$

Como $f(0) = 1$, segue que $f(x) = e^x$. Assim,

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} x^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Terminamos esta aula aplicando o Teorema 5 para desenvolver a função $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, em série de potências quando $|x| < 1$. Para tanto, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$ inteiro, definimos o **número binomial generalizado** $\binom{\alpha}{n}$ pondo $\binom{\alpha}{0} = 1$ e, para $n \geq 1$,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (6)$$

O lema a seguir estabelece algumas propriedades úteis dos números binomiais generalizados. A propriedade do item (a) também é conhecida como a **relação de Stifel**.

Lema 10. *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:*

- (a) $\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}$.
- (b) $\frac{n}{\alpha} \binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n-1}$, para todo $\alpha \neq 0$.

Prova. O item (a) é um cálculo fácil:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} - \binom{\alpha-1}{n} &= \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) \\ &\quad - \frac{1}{n!} (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n) \\ &= \frac{1}{n!} (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha - (\alpha-n)) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) \\ &= \binom{\alpha-1}{n-1}. \end{aligned}$$

O item (b) segue imediatamente de (6).

□

O resultado a seguir é conhecido como o **Teorema da Série Binomial** e é devido a Newton. Observe que (7) generaliza a fórmula usual do binômio de Newton, uma vez que $\binom{\alpha}{k} = 0$ se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $k > \alpha$.

Teorema 11 (Newton). *Para $\alpha \neq 0$ e $|x| < 1$, temos*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k. \quad (7)$$

Prova. Conforme observado, já temos a validade de (7) se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suponhamos, pois, que $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$; então, $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ para todo $k \geq 0$. Como

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \frac{n+1}{|\alpha-n|} \xrightarrow{n} 1,$$

o Corolário 3 garante que a série $\sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$ tem raio de convergência igual a 1. Portanto, a função $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$, é derivável, com

$$f'(x) = \sum_{k \geq 1} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} = \sum_{k \geq 1} \alpha \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1}, \quad (8)$$

em que utilizamos o item (b) do lema anterior na última igual-

dade. Segue daí e do item (a) do mesmo lema que

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= \alpha(1+x) \sum_{k \geq 1} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} \\ &= \alpha \left(\sum_{k \geq 1} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} + \sum_{k \geq 1} \binom{\alpha-1}{k-1} x^k \right) \\ &= \alpha \left(1 + \sum_{k \geq 2} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} + \sum_{k \geq 2} \binom{\alpha-1}{k-2} x^{k-1} \right) \\ &= \alpha \left(1 + \sum_{k \geq 2} \binom{\alpha}{k-1} x^{k-1} \right) = \alpha \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k \\ &= \alpha f(x).\end{aligned}$$

Como $f(0) = 1$, segue que f resolve, no intervalo $(-1, 1)$, o PVI

$$\begin{cases} (1+x)y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Para resolvê-lo (sem invocar o Teorema de Existência e Unicidade), note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((1+x)^{-\alpha}y) &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}y + (1+x)^{-\alpha}y' \\ &= (1+x)^{-\alpha-1}(-\alpha y + (1+x)y') = 0.\end{aligned}$$

Assim, $(1+x)^{-\alpha}y$ é constante no intervalo $(-1, 1)$, de sorte que $(1+x)^{-\alpha}y = y(0) = 1$. Então, $y(x) = (1+x)^\alpha$ é a única solução e, como f também é solução, temos $f(x) = (1+x)^\alpha$. $\square$

Corolário 12. Para $\alpha, \beta \neq 0$, temos

$$(1+\beta x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} (\beta x)^k,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \frac{1}{|\beta|}$.

Prof. Antonio Caminha

Prova. Basta aplicar (7), com βx no lugar de x , observando que $|\beta x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{|\beta|}$. $\square$

Exemplo 13. Podemos utilizar o Teorema Binomial para estimar certos números reais. Por exemplo, utilizando os três primeiros termos da expansão binomial para estimar $\sqrt[5]{31}$, obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{31} &= \sqrt[5]{32 \cdot \frac{31}{32}} = 2\sqrt[5]{\frac{31}{32}} = 2\left(1 - \frac{1}{32}\right)^{1/5} \\ &= 2 \sum_{k \geq 0} \binom{1/5}{k} \left(-\frac{1}{32}\right)^k \\ &\cong 2 \left(\binom{1/5}{0} \left(-\frac{1}{32}\right)^0 + \binom{1/5}{1} \left(-\frac{1}{32}\right)^1 + \binom{1/5}{2} \left(-\frac{1}{32}\right)^2 \right) \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{32}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \cdot \frac{1}{1024} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{5 \cdot 16} - \frac{1}{5^2 \cdot 256} \\ &= 2 - \frac{5^3}{10^4} - \frac{5^6}{10^8} \\ &= 1,98734375.\end{aligned}$$

Pode ser mostrado que tal valor está correto até a quinta casa decimal!

Estudo & Problemas

1. Calcule os raios de convergência das séries de potências dos itens a seguir:

(a) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} x^k$.

(b) $\sum_{k \geq 0} e^{-k^2} x^k$.

(c) $\sum_{k \geq 0} x^{2^k}$.

2. Se a série de potências $\sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$ tem raio de convergência $R > 0$, use o Teorema 5 para mostrar que as séries de potências

$$\sum_{k \geq 1} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \text{e} \quad \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

também têm raios de convergência iguais a R .

3. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\sin x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \quad \text{e} \quad \cos x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

(Sugestão: use o teste da raiz para verificar que as funções $f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ e $g(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ estão definidas em toda a reta. Em seguida, conclua que $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$, logo, que f e g resolvem a EDO $y'' + y = 0$.)

4. Mostre que $(1 - 2x)^{-1/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} \binom{2k}{k} x^k$ para $|x| < \frac{1}{2}$.
5. * Para $n \in \mathbb{N}$ e $|x| < 1$, prove que $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^k$.
(Sugestão: partindo de $\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$, aplique o Corolário 6. Alternativamente, expanda $(1-x)^{-n}$ com o auxílio da série binomial.)

6. Mostre que, para $|x| < 1$, tem-se

$$\arcsen x = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{4^k (2k+1)} \binom{2k}{k} x^{2k+1}.$$

7. Novamente a respeito da função $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, faça os seguintes itens:

(a) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$

(b) Integre ambos os membros da igualdade do item (a), de 0 a 1, para deduzir a **fórmula de Leibniz** para π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

8. A fórmula do Exemplo 7 pode ser modificada de modo a calcular $\log a$, para todo $a > 0$. Para tanto, faça os seguintes itens:

(a) Mostre que, para $x \in (-1, 1)$, temos

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

(b) Mostre que $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ define uma bijeção de $(-1, 1)$ em $(0, +\infty)$.

(c) Utilize a fórmula do item (a) para calcular $\log 3$ com quatro casas decimais corretas.

9. Leia a seção 26 do livro-texto e faça o problema 7.

10. * O conjunto dos naturais é particionado em m progressões aritméticas infinitas e não constantes, de razões $d_1, d_2, \dots, d_m$. Prove que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_m} = 1.$$

11. * Sejam $u, v, w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas pelas expansões em séries de potências

$$\begin{aligned}u(x) &= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \\v(x) &= x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots \\w(x) &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots\end{aligned}$$

Prove que, para todo real x , tem-se

$$u(x)^3 + v(x)^3 + w(x)^3 = 3u(x)v(x)w(x) + 1.$$

Referências

- [1] T. Apostol. *Calculus, Volume 1*, 2ª edição. John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1967.
- [2] A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª edição. Coleção Profmat. SBM, Rio de Janeiro, 2022.