17. Soluções em Séries de Potências

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

Sejam $p, q : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ funções (necessariamente infinitamente diferenciáceis) dadas por séries de potências convergentes

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} p_k (x - x_0)^k \ \text{ e } \ q(x) = \sum_{k \geq 0} q_k (x - x_0)^k.$$

Conforme já mencionamos, uma estratégia importante para a obtenção de uma solução $y = y(x)$ para a EDO de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

num intervalo do tipo $(x_0 - s, x_0 + s)$, com $0 < s \leq r$, é tentar escrever y como uma série de potências

$$y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$$

convergente nesse intervalo.

Para entender como fazer isso, observemos primeiramente que, trocando x por $x + x_0$ e $(x_0 - r, x_0 + r)$ por $(-r, r)$, podemos supor que $x_0 = 0$ e

$$p(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{k\geq 0} q_k x^k$$

no intervalo $(-r, r)$.

Admitamos que, para algum $0 < s \leq r$, a equação (1) possua uma solução $y : (-s, s) \to \mathbb{R}$ dada pela série de potências

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

Pela teoria de séries de potências, sabemos que

$$y'(x) = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} (k+1) a_{k+1} x^k$$

e

$$y''(x) = \sum_{k\geq 1} (k+1) k a_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k\geq 0} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

no intervalo $(-s, s)$. Também sabemos que, para todo $x \in (-s, s)$, essas séries são absolutamente convergentes. Como o mesmo é verdadeiro para as séries que definem $p(x)$ e $q(x)$, o Teorema 22 da nota de aula "*Convergência de Séries*" garante que, para $x \in (-s, s)$, vale

$$\begin{aligned} p(x)y'(x) &= \left(\sum_{k\geq 0} p_k x^k\right)\left(\sum_{k\geq 0} (k+1) a_{k+1} x^k\right) = \\ &= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} p_{k-j} x^{k-j} \cdot (j+1) a_{j+1} x^j\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} (j+1) p_{k-j} a_{j+1}\right) x^k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q(x)y(x) &= \left(\sum_{k\geq 0} q_k x^k\right)\left(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\right) \\ &= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}x^{k-j}\cdot a_j x^j\right) \\ &= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j\right) x^k. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões para $y''(x)$, $p(x)y'(x)$ e $q(x)y(x)$ em (1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + p(x)y' + q(x)y \\ &= \sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k}(j+1)p_{k-j}a_{j+1}\right)x^k + \\ &\quad + \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}a_j\right)x^k \\ &= \sum_{k\geq 0}\left((k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{j=0}^{k}\big((j+1)p_{k-j}a_{j+1} + q_{k-j}a_j\big)\right)x^k. \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{j=0}^{k}\big((j+1)p_{k-j}a_{j+1} + q_{k-j}a_j\big) = 0$$

ou, ainda,

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+2)(k+1)}\sum_{j=0}^{k}\big((j+1)p_{k-j}a_{j+1} + q_{k-j}a_j\big), \qquad (2)$$

para todo $k \geq 0$.

Recorde que estamos supondo conhecidos os coeficientes p_{k-j} e q_{k-j}, para todos $k \geq j \geq 0$. Então, a recorrência acima dá uma fórmula para a_{k+2} (para $k \geq 0$) em termos dos coeficientes anteriores a_0, a_1, $\ldots$, a_k, a_{k+1}. Assim, no final das contas, os coeficientes a_2, a_3, $\ldots$ dependerão de a_0 e a_1, estando inteiramente determinados uma vez que fixemos os valores para esses dois primeiros coeficientes.

A questão que resta é saber se, para alguma escolha de a_0 e a_1, a série $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$, com coeficientes a_k satisfazendo a recorrência (2), realmente converge em algum intervalo $(-s, s)$, com $0 < s \leq r$. Se isso acontecer, então todo o raciocínio que fizemos até aqui é válido e fornece uma solução para a EDO de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

De fato, o que acontece é o melhor possível: podemos escolher a_0 e a_1 como quisermos e, para cada uma de tais escolhas, a série $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ obtida acima **converge no intervalo $(-r, r)$**. Resumimos isto no seguinte

Teorema 1 (soluções em série de EDOs). *Suponha que as funções $p, q : (-r, r) \to \mathbb{R}$ sejam dadas por séries de potências convergentes. Então, para todos $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, o PVI*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1 \end{cases}$$

admite uma única solução $y : (-r, r) \to \mathbb{R}$, também dada por uma série de potências convergente.

Observe que o enunciado do teorema não explicita as expansões em série das funções p e q, nem tampouco a recorrência (2). A razão para isso é que, em exemplos práticos, uma vez que identifiquemos as expansões em série das funções p e q, o teorema anterior nos dá a garantia de que podemos de fato procurar soluções em série. Contudo, para fazê-lo, em vez de aplicar diretamente (2), é quase sempre melhor repetir o argumento que nos levou a tal recorrência, tendo em vista que certamente não vale a pena decorá-la e os cálculos em exemplos específicos podem ser bem mais simples que o caso geral.

Outra observação importante (que, de todo modo, já sabemos) é que as soluções em série y_1 e y_2 satisfazendo $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ e $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ são LI. Isto porque, sendo W seu wronskiano, temos

$$W(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1;$$

logo, $W(x) \neq 0$ para todo $x \in (-r, r)$ e, conforme sabemos, isso equivale ao fato de y_1 e y_2 serem LI.

A prova do teorema anterior requer argumentos mais refinados de convergência do que desejamos utilizar. Se você ficou curioso com a (bela) demonstração, leia a primeira parte do Apêndice A do capítulo 5 do livro-texto.

Contudo, observamos que, em todos os casos que discutiremos ao longo do curso, a convergência das séries obtidas a partir de (2) será estabelecida diretamente, de forma que poderemos prescindir de invocar o teorema nesses casos. O exemplo a seguir ilustra esse ponto, além de exercitar a obtenção de soluções em série.

Exemplo 2. O teorema anterior dá outra maneira de resolvermos a equação $y'' + \lambda y = 0$, com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

De fato, fazendo $y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$, temos

$$y''(x) = \sum_{k \geq 1} (k+1)k a_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k \geq 0} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k,$$

logo,

$$y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow \sum_{k\geq 0}\big((k+2)(k+1)a_{k+2} + \lambda a_k\big)x^k = 0.$$

Então,

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + \lambda a_k = 0,\ \forall\ k \geq 0,$$

de sorte que

$$a_{k+2} = \frac{-\lambda}{(k+2)(k+1)}\,a_k,\ \forall\ k \geq 0.$$

Sendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, segue da recorrência anterior que

$$a_3 = \frac{-\lambda}{3\cdot 2}\,a_1 = 0,\quad a_5 = \frac{-\lambda}{5\cdot 4}a_3 = 0,\quad \ldots,\quad a_{2j-1} = 0,\ \forall\ j \geq 1.$$

Também a partir dela,

$$a_{2j+2} = \frac{-\lambda}{(2j+2)(2j+1)}\,a_{2j},\ \forall\ j \geq 0,$$

de sorte que

$$a_{2n} = a_0\prod_{j=0}^{n-1}\frac{a_{2j+2}}{a_{2j}} = \prod_{j=0}^{n-1}\frac{-\lambda}{(2j+2)(2j+1)} = \frac{(-\lambda)^n}{(2n)!}.$$

Assim,

$$y(x) = \sum_{k\geq 0}a_k x^k = \sum_{n\geq 0}a_{2n}x^{2n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-\lambda)^n}{(2n)!}\,x^{2n}.$$

Consideremos, agora, dois casos separadamente:

(i) $\lambda > 0$: nesse caso, temos

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{\lambda} x)^{2n} = \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

(ii) $\lambda < 0$: aqui,

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} (\sqrt{-\lambda} x)^{2n} = \cosh(\sqrt{-\lambda} x).$$

Note que não é necessário invocar o Teorema 1 para validar as soluções em série acima. Realmente, como $\sqrt[m]{m!} \xrightarrow{m} +\infty$, temos que

$$\sqrt[n]{\frac{|(-\lambda)^n x^{2n}|}{(2n)!}} = \frac{|\lambda| x^2}{\left(\sqrt[2n]{(2n)!}\right)^2} \xrightarrow{n} 0;$$

portanto, o teste da raiz (Teorema 21 das notas de aula sobre convergência de séries) garante que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série de potências $\sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda)^n}{(2n)!} x^{2n}$ converge.

Exemplo 3. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Solução. Fazendo $y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$, temos

$$xy'(x) = x \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k \geq 1} k a_k x^k = \sum_{k \geq 0} k a_k x^k$$

e

$$y''(x) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k \geq 0} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k.$$

Portanto, a função y resolve a EDO se, e só se,

$$\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k\geq 0} ka_kx^k + \sum_{k\geq 0} a_kx^k = 0$$

ou, o que é o mesmo,

$$\sum_{k\geq 0}\big((k+2)(k+1)a_{k+2} + \underbrace{ka_k + a_k}_{=(k+1)a_k}\big)x^k = 0.$$

Segue que, para todo $k \geq 0$,

$$(k+1)\big((k+2)a_{k+2} + a_k\big) = 0,$$

logo,

$$(k+2)a_{k+2} + a_k = 0.$$

Uma vez que $a_0 = y(0) = 1$ e $a_1 = y'(0) = 0$, argumentando como no exemplo anterior obtemos $a_{2j-1} = 0$ para todo $j \geq 1$. Também,

$$a_{2n} = a_0 \prod_{j=0}^{n-1} \frac{a_{2j+2}}{a_{2j}} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-1}{2j+2} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-1}{2(j+1)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}.$$

Então,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k\geq 0} a_kx^k = \sum_{n\geq 0} a_{2n}x^{2n} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n n!}\, x^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} \\ &= e^{-x^2/2}, \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, a expansão em série (5) da nota "*Séries de Potências*", com $-x^2/2$ no lugar de x. (Aliás, a convergência da série (5) também garante que, no argumento acima, não precisamos invocar o Teorema 1.) $\square$

Exemplo 4. A discussão acima permite resolver a equação de Legendre de ordem p,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0,$$

no intervalo $(-1, 1)$. Realmente, reescrevendo a EDO como

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\,y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}\,y = 0,$$

vemos que

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{e} \quad q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2}.$$

Agora, para $x \in (-1, 1)$, temos $|x^2| < 1$, logo,

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k\geq 0}(x^2)^k = \sum_{k\geq 0} x^{2k},$$

de sorte que

$$p(x) = -2x\sum_{k\geq 0} x^{2k} = \sum_{k\geq 0}(-2)x^{2k+1}$$

e

$$q(x) = p(p+1)\sum_{k\geq 0} x^{2k} = \sum_{k\geq 0} p(p+1)x^{2k}.$$

Não continuaremos a partir desse ponto, uma vez que reservamos três aulas futuras à discussão da equação de Legendre.

Estudo & Problemas

1. Leia as seções 27 e 28 do livro-texto.

2. Dado $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, obtenha uma solução em série de potências para o PVI
$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 1 \end{cases},$$
justificando diretamente a convergência da série de potências encontrada.

3. Complete a discussão do Exemplo 2, obtendo a solução em série de $y'' + \lambda y = 0$ satisfazendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e verificando, a partir da série obtida, que
$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x), \text{ se } \lambda > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x), \text{ se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

4. Resolva os problemas 1 a 4 da seção 28 do livro-texto.