18. O Método de Frobenius

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

A discussão da aula anterior não se aplica à **equação de Euler**[1],

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0, \tag{1}$$

com $p, q \in \mathbb{R}$, não ambos nulos, se quisermos uma solução definida em um intervalo da forma $(-r, r)$, para algum $r > 0$.

Realmente, para $x \neq 0$, tal equação equivale a

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0,$$

e vemos que pelo menos uma das funções $x \mapsto \frac{p}{x}$ e $x \mapsto \frac{q}{x^2}$ não admite expansão em série de potências em intervalo algum centrado em 0 (pois, do contrário, as duas funções admitiriam extensões contínuas a 0, o que não é o caso para $x \mapsto \frac{p}{x}$ se $p \neq 0$ e para $x \mapsto \frac{q}{x^2}$ se $q \neq 0$).

Contudo, restringindo-nos ao intervalo $(0, +\infty)$ e procurando

[1]Você terá oportunidade de ver como a equação de Euler aparece em Física Matemática nos problemas propostos à aula "*A Importância Física da Equação e dos Polinômios de Legendre*", mais adiante.

soluções da forma $y(x) = x^t$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2y'' + pxy' + qy &= x^2 \cdot t(t-1)x^{t-2} + px \cdot tx^{t-1} + qx^t \\ &= t(t-1)x^t + ptx^t + qx^t \\ &= \big(t(t-1) + pt + q\big)x^t, \end{aligned}$$

de sorte que

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0 \Leftrightarrow t(t-1) + pt + q = 0.$$

Dessa forma, sendo α_1 e α_2 as raízes (possivelmente complexas) da equação de segundo grau

$$t(t-1) + pt + q = 0, \tag{2}$$

obtemos as soluções

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \ \text{ e } \ y_2(x) = x^{\alpha_2},$$

as quais são LI se $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Se $\alpha_1, \alpha_2 \notin \mathbb{R}$, então α_1 e α_2 são complexos conjugados, digamos $\alpha_1 = \alpha + i\beta$ e $\alpha_2 = \alpha - i\beta$, para certos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$. Nesse caso, recordamos (ou, se você não souber disso, *definimos*) que, para $u, v \in \mathbb{R}$,

$$x^{u+iv} := e^{(u+iv)\log x}.$$

Então,

$$\begin{aligned} x^{u+iv} &= e^{u\log x} \cdot e^{iv\log x} \\ &= e^{\log(x^u)}\,\mathrm{cis}(v\log x) \\ &= x^u(\cos(v\log x) + i\,\mathrm{sen}(v\log x)). \end{aligned}$$

Em particular,

$$y_1(x) = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha(\cos(\beta\log x) + i\,\mathrm{sen}(\beta\log x))$$

e (uma vez que a função cos é par e a função sen é ímpar)

$$y_2(x) = x^{\alpha - i\beta} = x^\alpha(\cos(\beta \log x) - i\,\mathrm{sen}(\beta \log x)).$$

Utilizando o fato de que a equação de Euler é linear, temos as soluções reais (também LI) $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$, tais que

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}(y_1(x) + y_2(x)) = x^\alpha \cos(\beta \log x)$$

e

$$\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2i}(y_1(x) - y_2(x)) = x^\alpha\,\mathrm{sen}(\beta \log x).$$

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, então, uma vez que $y_1(x) = x^\alpha$ não se anula no intervalo $(0, +\infty)$, a proposição 5 da aula "*Alguns Fatos Sobre a Solução Geral ...*" ensina que a equação admite outra solução y_2, LI com y_1, da forma $y_2(x) = x^\alpha v$.

De fato, podemos tomar $v = \log x$. Para ver porque, note inicialmente que

$$y_2' = \alpha x^{\alpha-1}v + x^\alpha v'$$

e

$$y_2'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}v + 2\alpha x^{\alpha-1}v' + x^\alpha v''.$$

Então, graças a (2), temos

$$\begin{aligned}
&x^2 y_2'' + pxy_2' + qy_2 = \\
&= x^2\big(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}v + 2\alpha x^{\alpha-1}v' + x^\alpha v''\big) \\
&\quad + px\big(\alpha x^{\alpha-1}v + x^\alpha v'\big) + qx^\alpha v \\
&= x^\alpha\big(\alpha(\alpha-1)v + 2\alpha x v' + x^2 v'' + p\alpha v + pxv' + qv\big) \\
&= x^\alpha\big((\underbrace{\alpha(\alpha-1) + p\alpha + q}_{=0})v + x(\underbrace{2\alpha + p}_{=1})v' + x^2 v''\big) \\
&= x^{\alpha+1}\big(v' + xv''\big).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$x^2y_2'' + pxy_2' + qy_2 = 0 \Leftrightarrow v' + xv'' = 0 \Leftrightarrow \frac{v''}{v'} = -\frac{1}{x},$$

de sorte, integrando, vemos que uma possibilidade é tomar

$$\log v' = -\log x = \log \frac{1}{x},$$

isto é,

$$v = \int \frac{1}{x} = \log x.$$

A situação da equação de Euler é menos particular do que parece, e pode ser aplicada a equações de segunda ordem do tipo

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

ou, após dividir ambos os membros por $(x - x_0)^2$,

$$y'' + \frac{p(x)}{x - x_0}\, y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}\, y = 0. \tag{3}$$

Aqui, por hipótese as funções $p, q : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ admitem expansões em séries de potências

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} p_k (x - x_0)^k \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{k \geq 0} q_k (x - x_0)^k, \tag{4}$$

definidas em todo o intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ e tais que

$$\text{(i) } p_0 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \text{(ii) } q_0 \neq 0 \text{ ou } q_1 \neq 0.$$

Pode ser facilmente mostrado (cf. problema 3) que a condição (i) (resp. a condição (ii)) garante que a função $x \mapsto \frac{p(x)}{x - x_0}$ (resp. a função $x \mapsto \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}$) não admite expansão em série de potências em intervalo algum centrado em x_0. Com isso, a discussão da aula anterior não se aplica, e não necessariamente podemos esperar que (3) admita soluções em séries de potências. Também por isso, dizemos que o ponto x_0 é um **ponto singular regular** de (3).

Para nós, a importância da classe de funções (3) reside no fato de que, além da equação de Euler, ela inclui (com $x_0 = 0$) a equação de Bessel[2] de ordem p,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \tag{5}$$

Realmente, reescrevendo essa equação como

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0,$$

vemos que $p(x) = 1$ e $q(x) = x^2 - p^2$, de sorte que $p(0) = 1 \neq 0$.

Um teorema de Frobenius[3] ensina como procurar soluções de (3). Para enunciá-lo, definimos a **equação indicial** associada a tal equação como a equação de segundo grau

$$t(t-1) + p(x_0)t + q(x_0) = 0. \tag{6}$$

(Em particular, (2) é a equação indicial da equação de Euler.)

Teorema 1 (Frobenius)**.** *Em relação à EDO* (3)*, sejam* α_1 *e* α_2 *as raízes complexas da equação indicial* (6)*.*

(*a*) *Se* $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$*, então* (3) *admite, em* $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$*, soluções LI da forma*

$$\begin{cases} y_1(x) = |x - x_0|^{\alpha_1} \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k \\ y_2(x) = |x - x_0|^{\alpha_2} \sum_{k \geq 0} b_k (x - x_0)^k \end{cases},$$

com $a_0 = b_0 = 1$.

[2]Ela também inclui a **equação hipergeométrica** de Gauss, cujo estudo foge ao escopo deste curso. O leitor interessado pode consultar a seção 31 do livro-texto.

[3]Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), matemático alemão.

(*b*) *Se* $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$, *então* (3) *admite, em* $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$, *soluções LI da forma*

$$\begin{cases} y_1(x) = |x - x_0|^{\alpha_1} \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k \\ y_2(x) = |x - x_0|^{\alpha_2} \sum_{k \geq 0} b_k (x - x_0)^k + C y_1(x) \log |x - x_0| \end{cases},$$

com $a_0 = b_0 = 1$ *e para alguma constante* C. *Ademais,* $C \neq 0$ *se* $\alpha_1 = \alpha_2$.

Nas notações do enunciado do Teorema de Frobenius, observe que o real $r > 0$ é o mesmo r das expansões em séries de potências (4) das funções $x \mapsto p(x)$ e $x \mapsto q(x)$.

Apesar da demonstração do teorema anterior fugir ao escopo destas notas, uma explicação heurística bastante instrutiva para sua validade pode ser lida na seção 30 do livro-texto. Aqui, nos contentaremos em ilustrar o uso do teorema para encontrar soluções LI para a equação de Bessel de ordem 0. Futuramente, abordaremos o caso da equação de Bessel geral.

Exemplo 2. A equação de Bessel de ordem 0,

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0,$$

é da forma (3) em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $p(x) = 1$ e $q(x) = x^2$. Portanto, ela tem, em $x_0 = 0$, um ponto singular regular, com equação indicial correspondente

$$t(t-1) + \underbrace{p(0)}_{=1} t + \underbrace{q(0)}_{=0} = 0,$$

isto é, $t^2 = 0$.

Uma vez que tal equação tem $t = 0$ como única raiz, o caso (b) do Teorema de Frobenius garante a existência de soluções

LI, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da forma

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k \\ y_2(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k + C y_1(x) \log|x| \end{cases},$$

com $a_0 = b_0 = 1$ e $C \neq 0$.

Explicitemos inicialmente a solução y_1. (Observe que y_1 é dada por uma série de potências, mas o Teorema 1 da aula anterior não garantia isso, pois ele só poderia ser aplicado se a função $\frac{1}{x}$ admitisse expansão em série de potências centrada em 0, o que não é o caso.)

Calculando

$$y_1' = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1} \;\text{ e }\; y_1'' = \sum_{k\geq 2} k(k-1) a_k x^{k-2},$$

temos

$$x y_1' = x \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k\geq 1} k a_k x^k$$

e

$$x^2 y_1'' = x^2 \sum_{k\geq 2} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k\geq 2} k(k-1) a_k x^k.$$

Substituindo as expressões acima na EDO, obtemos

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1) a_k x^k + \sum_{k\geq 1} k a_k x^k + \sum_{k\geq 0} a_k x^{k+2} = 0$$

ou, ainda,

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1) a_k x^k + \sum_{k\geq 1} k a_k x^k + \sum_{k\geq 2} a_{k-2} x^k = 0.$$

Então,

$$a_1 x + \sum_{k\geq 2} \big(k(k-1) a_k + k a_k + a_{k-2}\big) x^k = 0,$$

de maneira que

$$a_1 = 0 \ \text{ e } \ k^2 a_k + a_{k-2} = 0, \ \forall \ k \geq 2.$$

Como $a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2}$ para $k \geq 2$, temos

$$a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3^2} = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5^2} = 0, \ \ldots.$$

Também,

$$\begin{aligned} a_0 = 1 \Rightarrow a_2 &= -\frac{a_0}{2^2} = -\frac{1}{2^2} \\ \Rightarrow a_4 &= -\frac{a_2}{4^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \\ \Rightarrow a_6 &= -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \\ \Rightarrow a_8 &= -\frac{a_6}{8^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \\ &\cdots \end{aligned}$$

A partir daí, pode-se provar facilmente por indução que

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = \frac{(-1)^n}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)^2} \\ &= \frac{(-1)^n}{\big(2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)\big)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y_1(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \, x^{2n}. \tag{7}$$

O teste da razão garante facilmente que a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \, x^n$$

converge em toda a reta. Portanto, a série em (7) também converge em toda a reta. Os detalhes são o objeto do problema 4.

Voltemo-nos, agora, à solução y_2. Uma vez que a equação de Bessel é linear, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\,y_2(x) &= \frac{1}{C}\sum_{k\geq 0} b_k x^k + y_1(x)\log|x| \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{b_k}{C}x^k + y_1(x)\log|x|\end{aligned}$$

também é solução. Assim, podemos supor que y_2 é da forma

$$y_2(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k + y_1(x)\log|x|.$$

(Mas, agora, não necessariamente $b_0 = 1$).

Como antes, calculamos, para $x > 0$,

$$y_2' = \sum_{k\geq 1} k b_k x^{k-1} + y_1'\log x + \frac{1}{x}\,y_1$$

e

$$y_2'' = \sum_{k\geq 2} k(k-1) b_k x^{k-2} + y_1''\log x + \frac{2}{x}\,y_1' - \frac{1}{x^2}\,y_1.$$

Substituindo na EDO, ficamos com

$$\begin{aligned}
&x^2y_2'' + xy_2' + x^2y_2 = \\
&= x^2\left(\sum_{k\geq 2} k(k-1)b_kx^{k-2} + y_1''\log x + \frac{2}{x}\,y_1' - \cancel{\frac{1}{x^2}\,y_1}\right) \\
&\quad + x\left(\sum_{k\geq 1} kb_kx^{k-1} + y_1'\log x + \cancel{\frac{1}{x}\,y_1}\right) \\
&\quad + x^2\left(\sum_{k\geq 0} b_kx^k + y_1\log x\right) \\
&= \sum_{k\geq 2} k(k-1)b_kx^k + \sum_{k\geq 1} kb_kx^k + \sum_{k\geq 0} b_kx^{k+2} \\
&\quad + (x^2y_1'' + xy_1' + x^2y_1)\log x + 2xy_1'.
\end{aligned}$$

Uma vez que $x^2y_1''+xy_1'+x^2y_1 = 0$ e $xy_1' = \sum_{k\geq 1} ka_kx^k$, obtemos

$$\begin{aligned}
x^2y_2'' + xy_2' + x^2y_2 &= \sum_{k\geq 2} k^2b_kx^k + b_1x + \sum_{k\geq 2} b_{k-2}x^k + 2\sum_{k\geq 1} ka_kx^k \\
&= (b_1 + 2a_1)x + \sum_{k\geq 2}(k^2b_k + b_{k-2} + 2ka_k)x^k.
\end{aligned}$$

Assim,

$$b_1 + 2a_1 = 0 \;\text{ e }\; k^2b_k + b_{k-2} + 2ka_k = 0,\ \forall\ k \geq 2.$$

Como $a_1 = 0$, temos $b_1 = 0$. Então, argumentando de maneira similar ao que fizemos para y_1, segue que $b_{2n-1} = 0$ para todo $n \geq 1$ (veja o problema 5). Para $k = 2n$, com $n \geq 0$, a recorrência acima dá

$$(2n)^2b_{2n} + b_{2n-2} + 4na_{2n} = 0,\ \forall\ j \geq 1, \tag{8}$$

com $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$. Essa recorrência permite expressar b_{2n} em função de n e b_0, e O mérito do Teorema de Frobenius reside justamente em garantir que a série resultante, $\sum_{n\geq 0} b_{2n}x^{2n}$, é convergente em $\mathbb{R}$.

Estudo & problemas

1. Leia as seções 29 e 30 do livro-texto.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$, encontre a solução geral da equação de Euler $x^2y'' + xy' - n^2y = 0$ no intervalo $(0, +\infty)$.
3. Nas notações da discussão que sucede (3), explique porque a a condição (i) (resp. a condição (ii)) garante que a função $x \mapsto \frac{p(x)}{x-x_0}$ (resp. a função $x \mapsto \frac{q(x)}{(x-x_0)^2}$) não admite expansão em série de potências em intervalo algum centrado em x_0.
4. Use o teste da razão para mostrar que a série (7) converge em toda a reta.
5. No Exemplo 2, use (8) para mostrar que $b_{2n-1} = 0$ para todo $n \geq 1$. Também, calcule b_2, b_4 e b_6 em termos de b_0.
6. Em relação à EDO $4xy''+2y'+y = 0$, verifique que a origem é um ponto singular regular e obtenha as duas soluções LI dadas pelo Teorema de Frobenius.
7. Ache uma solução em série de potências da EDO $xy''+y'+y = 0$, convergente em $(-\infty, +\infty)$.