19. Resolvendo a Equação de Legendre

Prof. Antonio Caminha*

8 de junho de 2022

Dada uma constante real p, apliquemos o método de soluções em série ao estudo da **equação de Legendre**,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \tag{1}$$

para $x \in (-1,1)$, em que $p \geq 0$ é um parâmetro real dado. Posteriormente, teceremos considerações físicas sobre a importância da equação de Legendre, as quais mostrarão que esse é o intervalo interessante.

Inicialmente, recorde que $y = y(x)$ resolve (1) num intervalo $I \subset (-1,1)$ centrado em 0 se, e só se, y resolve a equação

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\, y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}\, y = 0. \tag{2}$$

Mas, como

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k\geq 0} (x^2)^k$$

para $x \in (-1,1)$, o Teorema 1 da aula "*Soluções em Séries de Potências*" garante que (2) admite duas soluções LI definidas no intervalo $(-1, 1)$, ambas dadas por séries de potências centradas em 0.

Seja, pois, $y : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$$

uma solução de (1). Então,

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y \\
&= (1-x^2)\sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1} \\
&\quad + p(p+1)\sum_{k\geq 0} a_k x^k \\
&= \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k x^k - 2\sum_{k\geq 1} k a_k x^k \\
&\quad + p(p+1)\sum_{k\geq 0} a_k x^k \\
&= \sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k\geq 0} k(k-1)a_k x^k - 2\sum_{k\geq 0} k a_k x^k \\
&\quad + p(p+1)\sum_{k\geq 0} a_k x^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\big((k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + p(p+1)a_k\big)x^k.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$p(p+1) - k(k-1) - 2k = p^2 + p - k^2 - k = (p-k)(p+k+1),$$

concluímos que

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (p-k)(p+k+1)a_k = 0$$

para todo $k \geq 0$. Assim, obtemos a recorrência

$$a_{k+2} = -\frac{(p-k)(p+k+1)}{(k+2)(k+1)}\, a_k, \quad \forall\, k \geq 0. \tag{3}$$

Suponha por um momento que $p \notin \mathbb{Z}_+$. Então, tendo em vista que $(p-k)(p+k+1) \neq 0$ para todo $k \geq 0$, a recorrência anterior garante que

$$a_k \neq 0 \Rightarrow a_{k+2} \neq 0 \Rightarrow a_{k+4} \neq 0 \Rightarrow \ldots.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} &a_0 \neq 0 \Rightarrow a_{2n} \neq 0, \text{ para todo } n \geq 0;\\ &a_1 \neq 0 \Rightarrow a_{2n+1} \neq 0, \text{ para todo } n \geq 0. \end{aligned}$$

Fazendo $k = 2j-2$ em (3) calculamos, para $n \geq 1$ inteiro,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_0 \prod_{j=1}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{2j-2}}\\ &= a_0 \prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{(p-(2j-2))(p+(2j-2)+1)}{((2j-2)+2)((2j-2)+1)} \right)\\ &= (-1)^n a_0 \prod_{j=1}^{n} \frac{(p-2j+2)(p+2j-1)}{2j(2j-1)}\\ &= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \left(\prod_{j=1}^{n} (p-2j+2) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (p+2j-1) \right). \end{aligned}$$

Fazendo agora $k = 2j - 1$ em (3), obtemos, para $n \geq 1$ inteiro,

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= a_1 \prod_{j=1}^{n} \frac{a_{2j+1}}{a_{2j-1}} \\
&= a_1 \prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{(p-(2j-1))(p+(2j-1)+1)}{((2j-1)+2)((2j-1)+1)} \right) \\
&= (-1)^n a_1 \prod_{j=1}^{n} \frac{(p-2j+1)(p+2j)}{(2j+1)2j} \\
&= \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} \left(\prod_{j=1}^{n} (p-2j+1) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (p+2j) \right).
\end{aligned}$$

Então, se $p \notin \mathbb{Z}_+$, temos as soluções LI $y_0, y_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ para a equação de Legendre, obtidas fazendo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, respectivamente (de forma que $y_0(0) = 1$, $y_0'(0) = 0$ e $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$):

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= a_0 + \sum_{n \geq 1} a_{2n} x^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\prod_{j=1}^{n} (p-2j+2) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (p+2j-1) \right) x^{2n}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= a_1 x + \sum_{n \geq 1} a_{2n+1} x^{2n+1} \\
&= x + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\prod_{j=1}^{n} (p-2j+1) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (p+2j) \right) x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Ainda no caso $p \notin \mathbb{Z}_+$, sabemos que toda solução $y : (-1,1) \to \mathbb{R}$ de (1) pode ser escrita da forma

$$y = c_0 y_0 + c_1 y_1,$$

com $c_0 = y(0)$ e $c_1 = y'(0)$.

Nesse ponto, é instrutivo observar que não precisamos recorrer ao Teorema 1 da aula "*Soluções em Séries de Potências*" para garantir que as soluções acima estão definidas em todo o intervalo $(-1, 1)$. De fato, olhando os segundos membros das expressões que definem y_0 e y_1 como séries de potências em x^2, podemos escrever

$$y_0(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \alpha_n (x^2)^n \quad \text{e} \quad y_1(x) = x + x\sum_{n\geq 1} \beta_n (x^2)^n,$$

com

$$\left|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{a_{2n-2}}{a_{2n}}\right| = \left|\frac{2n(2n-1)}{(p-2n+2)(p+2n-1)}\right| \xrightarrow{n} 1$$

e

$$\left|\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}\right| = \left|\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}\right| = \left|\frac{(2n+1)2n}{(p-2n+1)(p+2n)}\right| \xrightarrow{n} 1.$$

Assim, o Corolário 3 da aula sobre séries de potências garante que as séries que definem y_0 e y_1 convergem sempre que $x^2 \in (-1, 1)$, isto é, sempre que $x \in (-1, 1)$.

Voltemo-nos, agora, à análise do que ocorre quando $p \in \mathbb{Z}_+$, para o quê consideraremos separadamente os casos p par e p ímpar.

(i) $p = 2m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$: nesse caso, a recorrência (3) se torna

$$a_{k+2} = -\frac{(2m-k)(2m+k+1)}{(k+2)(k+1)}\, a_k \tag{4}$$

para todo $k \geq 0$, de sorte que $(2m-k)(2m+k+1) \neq 0$ para todo $k \geq 0$ ímpar. Portanto, os cálculos anteriores para y_1 continuam válidos e dão a mesma solução que já obtivemos.

Contudo, (4) deixa claro que $a_{2m+2} = 0$ e, a partir daí, que $a_{2m+4} = 0$, $a_{2m+6} = 0$, ... Então, y_0 se reduz ao polinômio

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_{2n} x^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\prod_{j=1}^{n} (2m - 2j + 2) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (2m + 2j - 1) \right) x^{2n}.
\end{aligned}
$$

Observando que

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n} (2m - 2j + 2) &= \prod_{j=1}^{n} 2(m - j + 1) = 2^n \prod_{j=1}^{n} (m - j + 1) \\
&= 2^n m(m-1)\ldots(m-n+1) = \frac{2^n m!}{(m-n)!}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n} (2m + 2j - 1) &= (2m+1)(2m+3)\ldots(2m+2n-1) \\
&= \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+2n)}{(2m+2)(2m+4)\ldots(2m+2n)} \\
&= \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+2n)}{2^n(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \\
&= \frac{(2m+2n)!}{(2m)!} \cdot \frac{m!}{2^n(m+n)!},
\end{aligned}
$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\cancel{2^n} m!}{(m-n)!} \cdot \frac{(2m+2n)!}{(2m)!} \cdot \frac{m!}{\cancel{2^n}(m+n)!} x^{2n} \\ &= 1 + \frac{(m!)^2}{(2m)!} \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \binom{2m+2n}{m+n, m-n, 2n} x^{2n} \\ &= \frac{(m!)^2}{(2m)!} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{2m+2n}{m+n, m-n, 2n} x^{2n}. \end{aligned}$$

Trocando n por $m-n$ na última soma acima, obtemos

$$y_0(x) = \frac{(-1)^m (m!)^2}{(2m)!} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{4m-2n}{2m-n, n, 2m-2n} x^{2m-2n}.$$

(ii) $p = 2m+1$, com $m \in \mathbb{Z}_+$: nesse caso, a recorrência (3) se torna

$$a_{k+2} = -\frac{(2m+1-k)(2m+k+2)}{(k+2)(k+1)} a_k \tag{5}$$

para todo $k \geq 0$, de sorte que $(2m+1-k)(2m+k+2) \neq 0$ para todo $k \geq 0$ par. Portanto, os cálculos anteriores para y_0 continuam válidos e dão a mesma solução que já obtivemos.

Contudo, (5) deixa claro que $a_{2m+3} = 0$ e, a partir daí, que $a_{2m+5} = 0$, $a_{2m+7} = 0$, ... Então, y_1 se reduz ao polinômio

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_1 x + \sum_{n=1}^{m} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\prod_{j=1}^{n} (2m-2j+2) \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (2m+2j+1) \right) x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Manipulando os coeficientes como no caso (i), temos novamente

$$\prod_{j=1}^{n} (2m-2j+2) = \frac{2^n m!}{(m-n)!}$$

e

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}(2m+2j+1) &= (2m+3)(2m+5)\ldots(2m+2n+1)\\ &= \frac{(2m+2)(2m+3)(2m+4)\ldots(2m+2n+1)}{(2m+2)(2m+4)\ldots(2m+2n)}\\ &= \frac{(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+2n+1)}{2^n(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\\ &= \frac{(2m+2n+1)!}{(2m+1)!}\cdot\frac{m!}{2^n(m+n)!},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}y_1(x) &= x+\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{\cancel{2^n}m!}{(m-n)!}\cdot\frac{(2m+2n+1)!}{(2m+1)!}\cdot\frac{m!}{\cancel{2^n}(m+n)!}x^{2n+1}\\ &= x+\frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\binom{2m+2n+1}{m+n,m-n,2n+1}x^{2n+1}\\ &= \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{2m+2n+1}{m+n,m-n,2n+1}x^{2n+1}.\end{aligned}$$

Trocando novamente n por $m-n$ na última soma acima, obtemos

$$y_1(x)=\frac{(-1)^m(m!)^2}{(2m+1)!}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{4m+1-2n}{2m-n,n,2m+1-2n}x^{2m+1-2n}.$$

Definindo, para $l\geq 0$ inteiro,

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l}\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}(-1)^n\binom{2l-2n}{l-n,n,l-2n}x^{l-2n}, \qquad (6)$$

temos que P_l é um polinômio de grau l, denominado o ***l*-ésimo polinômio de Legendre**[1].

É imediato que

$$\begin{aligned} P_{2m}(x) &= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{4m-2n}{2m-n, n, 2m-2n} x^{2m-2n} \\ &= \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2} y_0(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_{2m+1}(x) &= \frac{1}{2^{2m+1}} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{4m+2-2n}{2m+1-n, n, 2m+1-2n} x^{2m+1-2n} \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{4m+1-2n}{2m-n, n, 2m+1-2n} x^{2m+1-2n} \\ &= \frac{(-1)^m (2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2} y_1(x), \end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade acima, utilizamos a identidade

$$\begin{aligned} &\binom{4m+2-2n}{2m+1-n, n, 2m+1-2n} = \\ &= \frac{{}^{2}\cancel{4m+2-2n}}{\cancel{2m+1-n}} \binom{4m+1-2n}{2m-n, n, 2m+1-2n}. \end{aligned}$$

Vemos então que, em qualquer caso, P_l é um múltiplo constante de y_0 ou y_1, logo, resolve a equação de Legendre com parâmetro $l \in \mathbb{Z}_+$,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0.$$

A figura 1 esboça o l-ésimo polinômio de Legendre P_l no intervalo $(-1, 1)$, para $0 \leq l \leq 5$.

[1] Posteriormente, veremos o porquê do fator $\frac{1}{2^l}$ na definição de P_l.

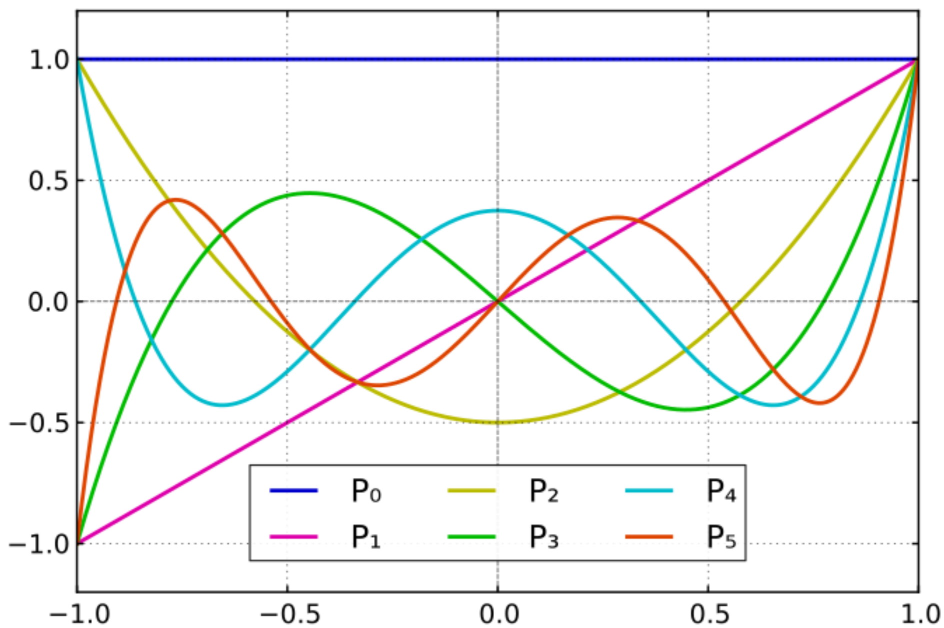

Figura 1: polinômios de Legendre para $0 \leq p \leq 5$.

Terminamos esta aula apresentando uma expressão mais simples para P_l, a qual é conhecida como a **fórmula de Rodrigues**[2] e que será muito útil na investigação que faremos das propriedades dos polinômios de Legendre.

Proposição 1 (Rodrigues)**.** *Para* $l \geq 0$ *inteiro, tem-se*

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l.$$

[2]Olinde Rodrigues (1795-1851), matemático francês.

Prova. Inicialmente, calculamos

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(-1)^n \binom{2l-2n}{l-n, n, l-2n} x^{l-2n} \\ &= \frac{1}{2^l}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(-1)^n \frac{(2l-2n)!}{(l-n)!n!(l-2n)!} x^{l-2n} \\ &= \frac{1}{2^l l!}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(-1)^n \frac{l!}{(l-n)!n!} \cdot \frac{(2l-2n)!}{(l-2n)!} x^{l-2n} \\ &= \frac{1}{2^l l!}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}\binom{l}{n}(-1)^n \frac{d^l}{dx^l}\big(x^{2l-2n}\big), \end{aligned}$$

tendo em vista que

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{dx^l}\big(x^{2l-2n}\big) &= (2l-2n)\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\big(x^{2l-2n-1}\big) \\ &= (2l-2n)(2l-2n-1)\frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}}\big(x^{2l-2n-2}\big) \\ &= \ldots\ldots\ldots \\ &= (2l-2n)(2l-2n-1)\ldots(l-2n+1)x^{l-2n} \\ &= \frac{(2l-2n)!}{(l-2n)!}\, x^{l-2n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!}\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}\binom{l}{n}(-1)^n \frac{d^l}{dx^l}\big(x^{2l-2n}\big) \\ &= \frac{1}{2^l l!}\sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}(-1)^n \frac{d^l}{dx^l}\big(x^{2l-2n}\big), \end{aligned}$$

uma vez que

$$\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor < n \leq l \Rightarrow 0 \leq 2l - 2n < l \Rightarrow \frac{d^l}{dx^l}(x^{2l-2n}) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} (-1)^n (x^2)^{l-n} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \end{aligned}$$

$\square$

Estudo & problemas

1. Explicite, por seus coeficientes, os cinco primeiros polinômios de Legendre.

2. Verifique que a equação de Legendre com parâmetro $p \geq 0$ pode ser escrita como

   $$\big((1 - x^2)y'\big)' + p(p+1)y = 0. \tag{7}$$

   Em seguida, dados $m, n \in \mathbb{Z}_+$ distintos e sendo P_m e P_n os m-ésimo e n-ésimo polinômios de Legendre, respectivamente, mostre que

   $$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0.$$

   (Sug: P_m resolve (7) para $p = m$ e, da mesma forma, P_n resolve (7) para $p = n$. Escreva as duas relações assim obtidas, multiplique a primeira por P_n, a segunda por P_m, subtraia os resultados membro a membro e integre de -1 a 1.)

3. Leia a seção 28 do livro-texto e faça os problemas 6 e 7.