1. Introdução às EDOs e EDOs Separáveis

Prof. Antonio Caminha*

21 de março de 2022

1 Introdução

Grosso modo, uma *equação diferencial* é uma relação que envolve uma função (em uma ou mais variáveis) e uma ou mais de suas derivadas, de sorte que *resolver* a equação é encontrar as funções que a tornam verdadeira. Em particular, a *incógnita* de uma equação diferencial é a função que queremos encontrar.

Exemplo 1. Quando a função incógnita é função de uma só variável independente, temos uma **equação diferencial ordinária** (abreviamos **EDO**). Por exemplo, se $y = y(t)$ é a quantidade de uma substância radioativa de uma amostra presente no instante t, então a lei do decaimento radioativo de Rutherford-Soddy[1] garante a existência de uma constante positiva k (a constante de decaimento radioativo), que só depende da substância em questão, de tal sorte que

$$y'(t) = -ky(t). \tag{1}$$

[1]Em homenagem ao físico neozelandês Ernest Rutherford (1871-1937) e ao químico inglês Frederick Soddy (1877-1956), que a formularam em 1902.

Exemplo 2. Quando a função incógnita é função de duas ou mais variáveis independentes, temos uma **equação diferencial parcial** (abreviamos **EDP**). Por exemplo, se $\Phi = \Phi(x, y, z)$ é o potencial eletrostático num ponto (x, y, z) do espaço (vazio) devido a uma distribuição volumétrica de cargas dada a priori, com densidade volumétrica de carga ρ (que pode variar de ponto a ponto), então a lei de Gauss[2] da Eletrostática garante que

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo.

Neste curso, pretendemos estudar alguns aspectos da teoria das EDOs. Nesse sentido, uma primeira convenção é que, sempre que não houver perigo de confusão, omitiremos a variável independente; por exemplo, em geral escrevemos (1) simplesmente como

$$y' = -ky.$$

A EDO mais simples de todas é

$$y'(x) = f(x), \tag{2}$$

em que $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função dada, definida num intervalo aberto I. Nesse caso, se f for contínua, então o Teorema Fundamental do Cálculo (abreviamos *TFC*) diz que a **solução geral** de (2) é

$$y(x) = \int f(x)dx + c,$$

onde, no segundo membro, $\int f(x)dx$ denota uma primitiva da função f e c denota uma constante arbitrária.

[2]Gauss dispensa apresentações. A quem quiser ter uma ideia de seu gênio matemático, uma leitura rápida e instigante pode ser encontrada no Apêndice C do capítulo 5 do livro do Simmons.

Teremos uma solução única para (2) se especificarmos seu valor em um ponto do intervalo I. Para tanto, dados $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, se impusermos que a solução $y : I \to \mathbb{R}$ de (2) deva satisfazer $y(x_0) = y_0$, então y ficará completamente determinada, e o TFC garante que

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0.$$

Ainda nesse caso, dizemos que a EDO (2), juntamente com a **condição inicial** $y(x_0) = y_0$ compõem o **problema de valor inicial** (abreviamos **PVI**)

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Exemplo 3. Encontre a solução geral da EDO $y' = e^{2x}$. Em seguida, identifique a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 3$.

Solução. Para a solução geral, temos

$$y(x) = \int e^{2x}dx + c = \frac{1}{2}e^{2x} + c,$$

onde c é uma constante real. A fim de que $y(1) = 3$, devemos ter

$$3 = y(1) = \frac{1}{2}e^2 + c,$$

de modo que $c = 3 - \frac{1}{2}e^2$ e

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 3 - \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^2) + 3.$$

Alternativamente, temos

$$y(x) = \int_1^x e^{2t}dt + y(1) = \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_1^x + 3 = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^2) + 3.$$

$\square$

Exemplo 4. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y' = \sqrt{4\cos^2 x + 1} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução. Como no exemplo anterior, temos

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{4\cos^2 t + 1}\, dt + y(0) = \int_0^x \sqrt{4\cos^2 t + 1}\, dt + 1.$$

$\square$

Ainda em relação ao exemplo anterior, note que não temos como calcular a integral acima em termos de funções elementares. Entretanto, mesmo assim dizemos que $\int_0^x \sqrt{4\cos^2 t + 1}\, dt + 1$ é a solução do PVI em questão. Isto porque aproximações numéricas da integral em questão permitem estimar a solução $y = y(x)$ com bom grau de acurácia.

Por conta de situações como essa, os precursores da teoria de EDO se referiam ao fato de a solução do PVI ser representada por uma integral dizendo que a EDO tinha sido **integrada**.

A **ordem** de uma EDO é a ordem da derivada de ordem mais alta da função incógnita que aparece na equação. Por exemplo, as EDOs (1) e (2) são de **primeira ordem**, ao passo que a EDO do movimento harmônico simples (que abreviamos *MHS* e estudaremos em detalhe mais adiante),

$$my'' + ky = 0,$$

é de **segunda ordem**.

A EDO mais geral de primeira ordem que estudaremos é do tipo

$$y' = F(x, y), \tag{3}$$

onde $F : I \times J \to \mathbb{R}$ é uma função contínua de duas variáveis ($I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos). Nesse caso, uma solução é uma função derivável $y : I \to J$ tal que

$$y'(x) = F(x, y(x)),$$

para todo $x \in I$, e um PVI típico é

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$.

2 EDOs separáveis

Nas próximas aulas teremos mais a dizer sobre a equação geral (3). Por ora, vamos nos contentar em analisar um caso simples, qual seja, aquele em que

$$F(x, y) = f(x)g(y),$$

para certas funções contínuas de uma variável $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$, com $g \neq 0$. Nesse caso, diremos que (3) é uma **EDO** (de primeira ordem) **separável**.

Também podemos encontrar a solução geral de uma EDO separável com a ajuda do TFC: sendo $F(x, y) = f(x)g(y)$ e escrevendo $y' = \frac{dy}{dx}$, temos inicialmente que

$$\begin{aligned} y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c. \end{aligned} \tag{4}$$

Em seguida, uma vez calculadas as integrais acima, bastará resolver a equação obtida para y (veremos exemplos logo mais).

Em relação ao PVI

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

procedendo como acima, temos

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Exemplo 5. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y' + xy = xy^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Solução. A EDO pode ser reescrita como

$$y' = x(y^2 - y) = f(x)g(y),$$

com $f(x) = x$ e $g(y) = y^2 - y = y(y - 1)$.

Uma vez que g não deve se anular e deve estar definida num intervalo, temos de vê-la como função com domínio $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ ou $(1, +\infty)$. A condição inicial $y(0) = 2$ diz que 2 deve pertencer ao domínio de g, de modo que este deve ser $(1, +\infty)$.

Então, escrevendo $y' = \frac{dy}{dx}$ e levando em conta a condição inicial, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = x(y^2 - y) &\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = x\,dx \\ &\Leftrightarrow \int_2^y \frac{ds}{s^2 - s} = \int_0^x t\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Agora,

$$\int_0^x t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

e[3]

$$\begin{aligned}\int_2^y \frac{ds}{s^2-s} &= \int_2^y \frac{ds}{s(s-1)} = \int_2^y \left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right) ds\\ &= \log(s-1)\Big|_2^y - \log s\Big|_2^y\\ &= \log(y-1) - (\log y - \log 2)\\ &= \log\left(\frac{2(y-1)}{y}\right).\end{aligned}$$

(Note que não precisamos escrever $\log|y-1|$ e $\log|y|$, pois g tem por domínio o intervalo $(1,+\infty)$.)

Substituindo os cálculos acima na última igualdade em (5), ficamos com

$$\log\left(\frac{2(y-1)}{y}\right) = \frac{x^2}{2}$$

ou, ainda,

$$\frac{2(y-1)}{y} = e^{x^2/2}.$$

Por fim, resolvendo a igualdade acima em y, chegamos à solução

$$y(x) = \frac{2}{2-e^{x^2/2}}.$$

Note agora que,

$$\begin{aligned}y(x) > 1 &\Leftrightarrow 0 < 2 - e^{x^2/2} < 2\\ &\Leftrightarrow e^{x^2/2} < 2 \Leftrightarrow x^2/2 < \log 2\\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2\log 2} < x < \sqrt{2\log 2}.\end{aligned}$$

Portanto, a solução é a função $y : (-\sqrt{2\log 2}, \sqrt{2\log 2}) \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = \frac{2}{2-e^{x^2/2}}$. □

[3]Aqui e em tudo o que segue, log denota a função logaritmo natural.

Exemplo 6. A equação do decaimento radioativo (1) é separável. Mais geralmente, dada uma função contínua $p : I \to \mathbb{R}$, em que I é um intervalo, a EDO

$$y' + p(x)y = 0 \tag{6}$$

é separável. Encontre sua solução geral.

Solução. Escrevendo $y' = \frac{dy}{dx}$, temos $\frac{dy}{dx} = -p(x)y$, logo,

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Integrando, obtemos

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + c$$

ou, ainda,

$$\log|y| = -\int p(x)dx + c.$$

Portanto,

$$|y| = e^{-\int p(x)dx + c} = e^c \cdot e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int p(x)dx},$$

onde $C = e^c \neq 0$. Assim, $|y|$ não se anula, de modo que

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \quad \text{ou} \quad -Ce^{-\int p(x)dx},$$

para alguma constante $C > 0$. Em resumo,

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{7}$$

com $C \in \mathbb{R}$. □

Trocando x por t e fazendo $p(t) = k$ em (6), onde k é uma constante positiva, reobtemos a EDO (1). Então, (7) dá

$$y(t) = Ce^{-\int k dt} = Ce^{-kt}.$$

Se $y(0) = y_0$, então $C = y_0$ e a solução do PVI

$$\begin{cases} y' = -ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

é a função

$$y(t) = y_0 e^{-kt}.$$

Estudo & Problemas

1. Leia as seções 1, 2, 4 e 5 do capítulo 1.

2. Faça os problemas da seção 1.2, exceto o problema 4.

3. A **meia-vida** de uma substância radioativa é o tempo necessário para que uma determinada massa dessa substância decaia à metade. Prove que a meia-vida de uma substância radioativa só depende de sua constante radioativa. Em particular, a meia-vida independe da massa inicial da substância.