20. Propriedades dos Polinômios de Legendre

Prof. Antonio Caminha*

21 de junho de 2022

Na aula anterior, vimos que o l-ésimo polinômio de Legendre P_l, definido por

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^n \binom{2l-2n}{l-n, n, l-2n} x^{l-2n},$$

satisfaz a *fórmula de Rodrigues*

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l.$$

Nesta aula, vamos utilizar tal fórmula para deduzir várias propriedades interessantes dos polinômios de Legendre. Para tanto, precisamos de alguns preliminares.

Denotemos por $C[-1,1]$ o conjunto das funções contínuas $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$. É imediato verificar que $C[-1,1]$ é um espaço vetorial real, quando munido com as operações usuais de adição de funções e multiplicação de uma função por uma constante:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \;\text{ e }\; (af)(x) = af(x),$$

para todos $f, g \in C[-1,1]$ e $a \in \mathbb{R}$, com $f+g, af \in C[-1,1]$.

As propriedades da integral de Riemann garantem que a aplicação

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C[-1,1]\times C[-1,1]\longrightarrow \mathbb{R},$$

definida para $f,g\in C[-1,1]$ por

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

é bilinear e simétrica. Também, para $f\in C[-1,1]$, temos

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)^2dx \geq 0,$$

com

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle = 0 &\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)^2dx = 0\\ &\Leftrightarrow f(x)=0,\ \forall\ x\in[-1,1]\\ &\Leftrightarrow f=0 \text{ em } C[-1,1].\end{aligned}$$

(A segunda equivalência vem do fato de que f^2 é uma função contínua e não negativa.) Portanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em $C[-1,1]$.

Sejam $\mathcal{V}=C^\infty[-1,1]$ o subespaço de $C[-1,1]$ formado pelas funções infinitamente deriváveis e $T:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ o operador definido por

$$T(y) = \big((x^2-1)y'\big)'.$$

As propriedades da derivada garantem que T é linear. Ademais, como

$$\big((x^2-1)y'\big)' = (x^2-1)y'' + 2xy',$$

temos para $y \in \mathcal{V}$ e $p \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned} T(y) = p(p+1)y &\Leftrightarrow (x^2-1)y'' + 2xy' = p(p+1)y \\ &\Leftrightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \\ &\Leftrightarrow y \text{ resolve a equação de Legendre} \\ &\quad\ \text{de ordem } p. \end{aligned}$$

Como mostramos que P_l resolve a equação de Legendre de ordem l, concluímos que

$$T(P_l) = l(l+1)P_l,\ \forall\ l \geq 0,$$

isto é, P_l é autovetor de T, com autovalor $l(l+1)$.

No que segue, mostraremos que $\{P_l;\ l \geq 0\}$ é uma base ortogonal para o subespaço de $\mathcal{V}$ formado pelos polinômios.

Lema 1. *O operador linear $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é autoadjunto em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Em símbolos, temos*

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle,\ \forall\ f, g \in \mathcal{V}.$$

Prova. Dada a definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos de provar que

$$\int_{-1}^{1} (Tf)(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)(Tg)(x)dx,$$

isto é, que

$$\int_{-1}^{1} \big((x^2-1)f'(x)\big)'g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\big((x^2-1)g'(x)\big)'dx.$$

Para tanto, basta integrarmos por partes duas vezes:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\big((x^2-1)f'(x)\big)'g(x)dx = \\
&= (x^2-1)f'(x)g(x)\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)f'(x)g'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} f'(x)(x^2-1)g'(x)dx \\
&= -\left(f(x)(x^2-1)g'(x)\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} f(x)\big((x^2-1)g'(x)\big)'dx\right) \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\big((x^2-1)g'(x)\big)'dx.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2. *Para $k, l \in \mathbb{Z}_+$ distintos, temos $P_k \perp P_l$ em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Prova. A Álgebra Linear ensina que, dado um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é um operador linear autoadjunto e $f, g \in \mathcal{V}$ são autovetores associados a autovalores distintos, então $f \perp g$.

Recordando a demonstração desse fato, se $Tf = \alpha f$ e $Tg = \beta g$, com $\alpha \neq \beta$, então

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle &\Rightarrow \langle \alpha f, g \rangle = \langle f, \beta g \rangle \\
&\Rightarrow (\underbrace{\alpha - \beta}_{\neq 0})\langle f, g \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle f, g \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Em nosso caso, temos $T(P_k) = k(k+1)P_k$ e $T(P_l) = l(l+1)P_l$. Como $k \neq l \Rightarrow k(k+1) \neq l(l+1)$, segue que $P_k \perp P_l$ em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Para o próximo resultado, precisamos do seguinte

Lema 3. *Se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$, *então:*

(a) $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, *para todo inteiro* $n \geq 2$.

(b) $I_{2k} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$, *para todo inteiro* $k \geq 0$, *e* $I_{2k-1} = \frac{(2^k k!)^2}{2k(2k)!}$, *para todo inteiro* $k \geq 1$.

Prova. Para o item (a), para $n \geq 2$ a fórmula de integração por partes nos permite calcular

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-1} \operatorname{sen}' x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2}(1 - \cos^2 x) dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2} dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

Para (b), é imediato que $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$. Por hipótese de indução, suponha que $I_{2m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$, para algum inteiro $m \geq 0$. Fazendo $n = 2m + 2$ na recorrência do item (a) e utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} I_{2m+2} &= \frac{2m+1}{2m+2} \cdot I_{2m} = \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2m+2)(2m+1)}{(2(m+1))^2} \cdot \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2m+2)!}{(2^{m+1}(m+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a primeira parte de (c) é válida para todo $k \geq 0$.

Por fim, a prova da validade da segunda parte é totalmente análoga, e será deixada como exercício. $\square$

Dada $f \in C[-1,1]$ e denotando por $\|\cdot\|$ a norma proveniente do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, veja que

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx}.$$

Proposição 4. *Para todo $l \in \mathbb{Z}_+$, temos $\|P_l\| = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$.*

Prova. Temos de mostrar que

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)^2 dx = \frac{2}{2l+1}, \ \forall \ l \geq 0.$$

Para tanto, faça

$$f(x) = (x^2 - 1)^l = x^{2l} - lx^{2l-1} + \ldots$$

e recorde que, pela fórmula de Rodrigues,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} f^{(l)}(x).$$

Agora, a regra da cadeia garante que, para $0 \leq k < l$ inteiro, tem-se $f^{(k)}(x) = (x^2-1)^{l-k}g_k(x)$, para algum polinômio g_k. Portanto, para tais k tem-se $f^{(k)}(\pm 1) = 0$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \big(f^{(l)}(x)\big)^2 dx &= \int_{-1}^{1} f^{(l)}(x)\big(f^{(l-1)}\big)'(x)dx \\
&= f^{(l)}(x)f^{(l-1)}(x)\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} \big(f^{(l)}\big)'(x)f^{(l-1)}(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} f^{(l+1)}(x)f^{(l-1)}(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} f^{(l+2)}(x)f^{(l-2)}(x)dx \\
&= \cdots\cdots \\
&= (-1)^l \int_{-1}^{1} f^{(2l)}(x)f^{(0)}(x)dx \\
&= (-1)^l \int_{-1}^{1} (2l)!(x^2-1)^l dx \\
&= 2(2l)! \int_{0}^{1} (1-x^2)^l dx.
\end{aligned}$$

Operando a substituição trigonométrica $x = \operatorname{sen} t$, com $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, temos $dx = \cos t\, dt$ e, daí,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \big(f^{(l)}(x)\big)^2 dx &= 2(2l)! \int_{0}^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2 t)^l \cos t\, dt \\
&= 2(2l)! \int_{0}^{\pi/2} (\cos t)^{2l+1} dt.
\end{aligned}$$

Portanto, segue do lema anterior (com $k = l+1$, a fim de que

$2k - 1 = 2l + 1$) que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(f^{(l)}(x)\right)^2 dx &= \cancel{2}(2l)! \cdot \frac{(2^{l+1}(l+1)!)^2}{\cancel{2}(l+1)(2(l+1))!} \\
&= \cancel{(2l)!} \cdot \frac{(2^{l+1}(l+1)!)^2}{(l+1) \cdot (2l+2)(2l+1)\cancel{(2l)!}} \\
&= \frac{2^{2l+1}((l+1)!)^2}{(l+1)^2(2l+1)} = \frac{2^{2l+1}(l!)^2}{2l+1}.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_l(x)^2 dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \left(f^{(l)}(x)\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2^{2l}\cancel{(l!)^2}} \cdot \frac{2^{2l+1}\cancel{(l!)^2}}{2l+1} \\
&= \frac{2}{2l+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Resumimos a discussão acima no seguinte

Teorema 5. *Em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o conjunto $\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l;\, l \geq 0\right\}$ é a base ortonormal do espaço vetorial dos polinômios, obtida pela aplicação do algoritmo de ortonormalização de Gram-Schmidt à base usual $\{x^l;\, l \geq 0\}$.*

Antes de apresentar a demonstração, recorde que, dados um espaço vetorial $\mathcal{V}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma base $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ para $\mathcal{V}$, o algoritmo de ortonormalização de Gram-Schmidt fornece uma base ortonormal $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ para $\mathcal{V}$, tal que

$$u_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|}$$

e, uma vez calculados $u_0, \ldots, u_{l-1}$,

$$u_l = \frac{v_l - \sum_{j=0}^{l-1} \langle v_l, u_j \rangle u_j}{\| v_l - \sum_{j=0}^{l-1} \langle v_l, u_j \rangle u_j \|}.$$

Ademais, mostra-se que tal base ortonormal é, a menos de multiplicação de alguns elementos por -1, a única para a qual

$$\mathrm{Span}\big(\{u_j;\, 0 \leq j \leq l\}\big) = \mathrm{Span}\big(\{v_j;\, 0 \leq j \leq l\}\big),$$

para todo $l \geq 0$.

Prova. As proposições 2 e 4 garantem que $\Big\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\, P_l;\, l \geq 0\Big\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathcal{V}$. Além disso, como $\partial P_l = l$ para todo $l \geq 0$, o problema 8 assegura que

$$\mathrm{Span}\big(\{P_j;\, 0 \leq j \leq l\}\big) = \mathrm{Span}\big(\{x^j;\, 0 \leq j \leq l\}\big)$$

para todo $l \geq 0$.

Uma vez que $\{x^l;\, l \geq 0\}$ é uma base do espaço vetorial dos polinômios, os comentários que antecedem a demonstração garantem que $\Big\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\, P_l;\, l \geq 0\Big\}$ é a base obtida a partir daquela pela aplicação do algoritmo de ortonormalização de Gram-Schmidt. $\square$

A teoria de espaços vetoriais com produto interno desenvolvida nos cursos de Álgebra Linear também mostra que, se $\mathcal{W}$ é um subespaço de dimensão finita de $\mathcal{V}$ e $f \in \mathcal{V}$, então o elemento $g \in \mathcal{W}$ que minimiza a distância $\|f - g\|$ é a *projeção ortogonal* de f sobre $\mathcal{W}$.

Em símbolos, sendo $P_{\mathcal{W}} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ a projeção ortogonal de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{W}$, temos que

$$\|f - P_{\mathcal{W}} f\| = \min\{\|f - g\|;\, g \in \mathcal{W}\}.$$

Também, uma vez que

$$\|f-g\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (f(x)-g(x))^2 dx},$$

dizemos que $P_{\mathcal{W}} f$ é o polinômio que minimiza o **desvio quadrático médio** de f.

Por fim, a teoria de espaços vetoriais com produto interno também ensina que, sendo $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{W}$ e dado $f \in \mathcal{V}$, o vetor $P_{\mathcal{W}} f$ é calculado pela *fórmula de expansão ortonormal*

$$P_{\mathcal{W}} f = \sum_{j=1}^{n} \langle f, u_j \rangle u_j.$$

Exemplo 6. *Obtenha o polinômio g, de grau menor ou igual a 4, que minimiza $\|x^5 - g\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma em $C[-1,1]$ proveniente do produto interno introduzido nesta aula.*

Solução. Sendo $\mathcal{W}$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 4, temos que $\mathcal{W}$ tem dimensão finita e o conjunto $\left\{u_l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l;\ 0 \leq l \leq 4\right\}$ é uma base ortonormal do mesmo. Portanto, fazendo $f = x^5$ na discussão anterior, concluímos que o polinômio procurado g é

$$g = P_{\mathcal{W}} x^5 = \sum_{j=0}^{4} \langle x^5, u_j \rangle u_j = \sum_{j=0}^{4} \frac{2j+1}{2} \langle x^5, P_j \rangle P_j,$$

com

$$\langle x^5, P_j \rangle = \int_{-1}^{1} x^5 P_j(x) dx.$$

Deixamos a você a tarefa de completar os cálculos acima, a fim de obter a expressão explícita de g. $\square$

Estudo & problemas

1. Revise o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em `https://en.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt_process`. Assista também a animação em `https://www.youtube.com/watch?v=pIy8xqh9sWs`.

2. Leia a seção 45 do livro-texto e faça o problema 2.

3. Calcule os possíveis valores de
$$\int_{-1}^{1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)P_4(x)dx.$$
(Sugestão: escreva o polinômio $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ como combinação linear de polinômios de Legendre e, em seguida, aplique o resultado da Proposição 2.)

4. Mostre que os polinômios de Legendre não têm raízes múltiplas. (Sugestão: aplique a teoria da aula sobre os teoremas de Sturm.)

5. Mostre que P_l tem l raízes simples no intervalo $(-1, 1)$. (Sugestão: sendo $-1 < x_1 < \ldots < x_k < 1$ as raízes de P_l no intervalo $(-1, 1)$, suponha $k < l$. Faça $f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_m)$ e mostre que, $\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx = 0$. Em seguida, mostre que $P_l = fg$, para algum polinômio g que é positivo ou negativo em $(-1, 1)$, e conclua que $\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx \neq 0$.)

6. Use a fórmula de Rodrigues para mostrar que
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l}(x + 1)^l + (x - 1)Q_l(x),$$
para um certo polinômio Q_l. Em seguida, conclua que $P_l(1) = 1$ e $P_l(-1) = (-1)^l$, para todo $l \geq 0$.

7. Mostre que $\int_{-1}^{1} P_l(x)P'_{l+1}(x)dx = 2$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

8. Se $\{q_l;\, l \geq 0\}$ é um conjunto de polinômios tais que $\partial q_l = l$ para todo $l \geq 0$, prove que
$$\text{Span}\big(\{q_j;\, 0 \leq j \leq l\}\big) = \text{Span}\big(\{x^j;\, 0 \leq j \leq l\}\big)$$
para todo $l \geq 0$.

9. Complete os cálculos do Exemplo 6.

10. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$ um polinômio dado. A fim de procurar uma série de potências $y(x) = \sum_{k\geq 0} a_kx^k$ que resolva o PVI
$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = p(x) \\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta \end{cases}$$
em algum intervalo aberto centrado em 0, faça $b_k = 0$ para todo $k \geq n$.

    (a) Prove que $(k+2)(k+1)a_{k+2} = (k-n)(k+n+1)a_k + b_k$, para todo $k \geq 0$.

    (b) Conclua que $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+3}x^{n+3} + a_{n+5}x^{n+5} + \ldots$.

    (c) Mostre que a série que define y tem raio de convergência 1 e, daí, que ela realmente resolve o PVI do enunciado.

11. A equação de Legendre de ordem $n \in \mathbb{Z}_+$, além do n-ésimo polinômio de Legendre, tem uma solução $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por uma série de potências infinita. Pode ser mostrado que
$$f(x) = P_n(x)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - W_n,$$

em que W_n é um polinômio de grau $n-1$. Portanto, como $P_n(\pm 1) \neq 0$ (vide problema 6), é imediato que f não admite uma extensão contínua ao intervalo $[0, 1]$ ou ao intervalo $[-1, 0]$. O objetivo desse problema é fornecer uma demonstração alternativa dessa última afirmação. Para tanto, faça os itens a seguir:

(a) Se $\alpha < 1$ é a maior raiz de P_n no intervalo $[-1, 1]$, seja $v : (\alpha, 1) \to \mathbb{R}$ tal que $y = P_n v$ resolve a equação de Legendre de ordem $n \in \mathbb{Z}_+$ em $(\alpha, 1)$. Prove que $v' = \frac{1}{(1-x^2)P_n^2}$ é uma possibilidade.

(b) Fixe $x_0 \in (\alpha, 1)$. Integre a função $P_n^2 v'$ por partes no intervalo $[x_0, x]$, com $x_0 < x < 1$. Em seguida, fazendo $x \to 1-$, conclua que v não admite uma extensão contínua ao intervalo $(\alpha, 1]$.

(c) Conclua que a função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ a que o enunciado alude, solução em série de potências infinita para a equação de Legendre de ordem $n \in \mathbb{Z}_+$, não admite extensão contínua ao intervalo $(-1, 1]$.

(d) Adapte os itens anteriores para mostrar que a função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ também não admite extensão contínua ao intervalo $[-1, 1)$.

Referências

[1] T. Apostol. *Calculus, Volume II*, segunda edição. John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1967.