

21. A Importância Física da Equação e dos Polinômios de Legendre

Prof. Antonio Caminha*

12 de junho de 2022

No espaço euclidiano tridimensional, associado a um sistema cartesiano de origem O , consideramos o sistema usual de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , com $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < \phi < \pi$.

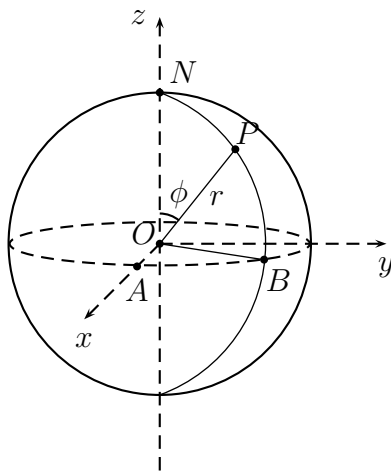


Figura 1: coordenadas esféricas do ponto P .

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

Nas notações da figura anterior, isso significa que, se $P \neq O$ tem coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , então

$$r = OP, \quad \theta = \widehat{AOB} \quad \text{e} \quad \phi = \widehat{NOP}.$$

Portanto, se P tem coordenadas cartesianas (x, y, z) , temos

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad \text{e} \quad z = r \cos \phi. \quad (1)$$

Considere, agora, o seguinte problema físico: temos uma esfera sólida S , de centro O e raio 1, tal que a temperatura em sua superfície é mantida constante ao longo dos paralelos $r = 1$, $\phi = \text{constante}$, valendo $f(\phi)$, em que $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada. Supomos, ainda, que não há fontes ou sorvedouros de calor no interior de S .

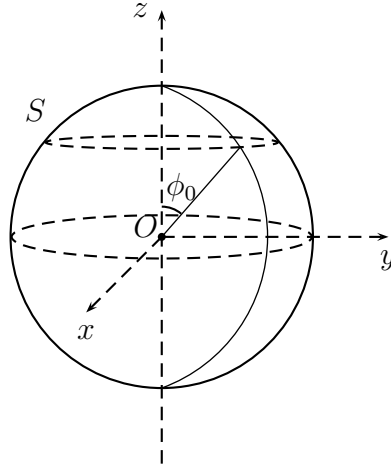


Figura 2: temperatura em S é constante ao longo do paralelo $\phi = \phi_0$.

Considerações físicas simples (veja, por exemplo, [1]) mostram que, se S for *homogênea* (isto é, se for composta de um material de densidade constante), então a temperatura T em

um ponto (x, y, z) de S , no instante t (medido a partir de $t = 0$) satisfaz a **Equação do Calor**

$$k\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2)$$

em que $k > 0$ é uma constante que depende somente do material do qual S é feita (a *condutibilidade térmica* do material), $T = T(x, y, z, t)$ e

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

é o **laplaciano**¹ (espacial) de T .

Quando o equilíbrio térmico (também dito o *estado estacionário*) é atingido, T não varia mais com o tempo, de forma que $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ e (2) fica reduzida à **Equação de Laplace**

$$\Delta T = 0. \quad (3)$$

Devido à *condição de contorno* imposta no início de nossa discussão (a constância da temperatura ao longo de cada paralelo $r = 1$, $\phi = \text{constante}$), é mais interessante expressar (3) utilizando coordenadas esféricas, ao invés de euclidianas.

Nesse sentido, graças à mudança de coordenadas $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, \phi)$, podemos ver a temperatura T , no estado estacionário, como função de (r, θ, ϕ) . Pela regra da cadeia, temos (veja o problema 4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \sin \phi \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{r \sin \phi} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot \left(\frac{\cos \phi \cos \theta}{r} \right). \end{aligned}$$

¹Em Física, em geral utiliza-se a notação $\nabla^2 T$, em vez de ΔT .

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial \theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \phi} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial \phi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \sin \phi \cos \theta \\
&\quad + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\cos \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \cos \theta - \sin \phi \sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

Calculando subsequentemente (e de modo análogo) $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$, utilizando as fórmulas deduzidas no problema 4 e substituindo em seguida os resultados em (3), obtemos a expressão para a Equação de Laplace em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Uma vez que a temperatura na superfície de S independe de θ , é razoável supor que, no equilíbrio, o mesmo ocorra no

interior de S . De outra forma, isso é o mesmo que supor que $T = T(r, \phi)$. Sendo esse o caso, temos $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$, de sorte que (4) simplifica para

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (5)$$

com a condição de contorno

$$T(1, \phi) = f(\phi). \quad (6)$$

Ignorando a condição de contorno por um momento, procuramos soluções não nulas de (5) da forma

$$T(r, \phi) = u(r)v(\phi).$$

(Ao fazê-lo, estaremos procurando soluções utilizando o **método de separação de variáveis**.) Assim fazendo, (5) dá

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) v + \frac{1}{\sin \phi} \cdot u \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dv}{d\phi} \right) = 0$$

ou, ainda

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = - \frac{1}{v \sin \phi} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dv}{d\phi} \right).$$

Agora, como o primeiro membro da última igualdade acima só depende de r e o segundo só depende de ϕ , concluímos que ambos são constantes, de sorte que deve existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = \lambda \quad \text{e} \quad - \frac{1}{v \sin \phi} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dv}{d\phi} \right) = \lambda.$$

Operando as derivações da primeira igualdade acima, concluímos que essas duas igualdades equivalem a

$$r^2 u'' + 2ru' - \lambda u = 0 \quad (7)$$

e

$$\frac{1}{\sin \phi} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dv}{d\phi} \right) + \lambda v = 0. \quad (8)$$

A estrutura da equação (7) sugere procurarmos soluções da forma $u(r) = r^\alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Substituindo essa expressão para u no primeiro membro de (7) e efetuando os cálculos, obtemos $(\alpha^2 + \alpha - \lambda)r^\alpha = 0$, de sorte que $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}$.

Se $1 + 4\lambda \neq 0$, não é difícil mostrar que as soluções $u(r) = r^\alpha$, obtidas para os dois valores de α acima, são LI; logo, nesse caso a solução geral de (7) é da forma

$$u(r) = C_1 r^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + C_2 r^{\frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}}.$$

Se $1 + 4\lambda = 0$, isto é, $\lambda = -\frac{1}{4}$, então $\alpha = -\frac{1}{2}$ e obtemos a solução $u_1(r) = r^{-1/2}$. Como $u_1 \neq 0$ para $r > 0$, o método da variação dos parâmetros garante a existência de uma solução u_2 , LI com u_1 , da forma $u_2 = v u_1$. Substituindo u_2 na equação e operando os cálculos necessários, concluímos que a função v deve ser tal que $r^{1/2}(rv'' + v') = 0$. Então, $rv'' + v' = 0$, de modo que $v(r) = \log r$ é uma possibilidade e a solução geral de (7) é

$$u(r) = C_1 r^{-\frac{1}{2}} + C_2 r^{-\frac{1}{2}} \log r.$$

Uma vez que $\lim_{r \rightarrow 0+} u(r)$ deve existir (pois, fisicamente, é razoável supor que a distribuição de temperatura T seja contínua em S , e T está definida em O), consideramos somente as soluções da forma

$$u(r) = C r^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}.$$

Considerações físicas também apontam para a razoabilidade de se supor que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existam os limites $\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{d^k u}{dr^k}(r)$.

Isso força que seja

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2} = n \in \mathbb{Z}_+.$$

Resolvendo essa equação para λ , obtemos $\lambda = n(n + 1)$, com $n \in \mathbb{Z}_+$.

Calculando as derivadas em (8) e substituindo λ por $n(n + 1)$, obtemos a EDO

$$v'' + (\operatorname{ctg} \phi)v' + n(n + 1)v = 0. \quad (9)$$

Perfazendo a mudança de variável $z = \cos \phi$, temos

$$v'(\phi) = \frac{dv}{d\phi} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{d\phi} = -\operatorname{sen} \phi \cdot \frac{dv}{dz}.$$

Calculando $v''(\phi)$ de modo análogo e substituindo os resultados em (9), obtemos

$$(1 - z^2)v''(z) - 2zv'(z) + n(n + 1)v(z) = 0, \quad (10)$$

que é a **equação de Legendre de ordem n** .

Como v deve permanecer limitada para $\phi \rightarrow 0+$ e $\phi \rightarrow \pi-$ (isto é, para $z \rightarrow (-1)+$ e $z \rightarrow 1-$), pode ser mostrado que a única solução de (10) que nos interessa é (a menos de uma constante), o **n -ésimo polinômio de Legendre** polinômio P_n . (Recorde que o intervalo de convergência das funções de Legendre é $(-1, 1)$. Assim, o que está sendo dito aqui é que, dentre tais funções, aquelas que não são polinômios são ilimitadas quando $z \rightarrow (-1)+$ e $z \rightarrow 1-$.)

A discussão feita até aqui obteve, para (5), as soluções particulares

$$r^n P_n(\cos \phi).$$

A ideia, agora, é *superpô-las*, de forma que

$$T(r, \phi) = \sum_{n \geq 0} a_n r^n P_n(\cos \phi), \quad (11)$$

com as constantes a_n escolhidas de maneira que

$$f(\phi) = T(1, \phi) = \sum_{n \geq 0} a_n P_n(\cos \phi).$$

ou, ainda,

$$f(\arccos z) = \sum_{n \geq 0} a_n P_n(z). \quad (12)$$

(Essa ideia é conhecida como o **princípio da superposição de soluções.**)

Vimos que os polinômios P_n têm a notável propriedade

$$\int_{-1}^1 P_n(z) P_m(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \frac{2}{2m+1}, & \text{se } n = m \end{cases}. \quad (13)$$

(E, por isso, dissemos que a sequência $(P_n)_{n \geq 0}$ é *ortogonal* em relação ao produto interno

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx,$$

definido no espaço vetorial $C([-1, 1]; \mathbb{R})$ das funções contínuas $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.)

Esse fato nos permite descobrir quem devem ser os a_n , a fim de que (12) valha. Realmente, multiplicando ambos os membros de (12) por $P_m(z)$ e integrando de -1 a 1 , obtemos

$$\int_{-1}^1 f(\arccos z) P_m(z) dz = \int_{-1}^1 \sum_{n \geq 0} a_n P_n(z) P_m(z) dz.$$

Então, admitindo que podemos permutar os limites $\int_{-1}^1$ e $\sum_{n \geq 0}$, segue de (13) que

$$\int_{-1}^1 f(\arccos z) P_m(z) dz = \sum_{n \geq 0} a_n \int_{-1}^1 P_n(z) P_m(z) dz = \frac{2a_m}{2m+1}.$$

Portanto,

$$a_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(\arccos z) P_m(z) dz,$$

para todo inteiro $n \geq 0$.

Por fim, substituindo a expressão para a_m , obtida acima, em (11) (reescrita com m no lugar de n como índice do somatório), obtemos a solução do problema que vimos considerando:

$$T(r, \phi) = \sum_{m \geq 0} \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(\int_{-1}^1 f(\arccos z) P_m(z) dz\right) r^m P_m(\cos \phi).$$

Estudo & Problemas

1. Confira os cálculos que levaram às soluções de (7).
2. Leia o Apêndice A do capítulo 8 do livro-texto.
3. Dada uma função duas vezes continuamente diferenciável $u = u(x, y)$ no plano, seu laplaciano Δu é definido por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

A equação de Euler aparece em Física em problemas envolvendo o cálculo de potenciais com simetria cilíndrica, quando precisamos calcular Δu em coordenadas polares,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (14)$$

A esse respeito, faça os seguintes itens:

(a) Verifique que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

(b) Verifique que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

e obtenha uma fórmula análoga para $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(c) As relações (14) nos permitem ver u como função de r e θ). Mostre que, nesse caso,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

(d) Se $\Delta u = 0$ e $u(r, \theta) = v(r)w(\theta)$, conclua que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{r^2 v'' + r v'}{v} = -\frac{w''}{w} = \lambda.$$

(e) Use que u é periódica de período 2π em θ para concluir que $\lambda = n^2$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

(f) Conclua que v satisfaz a equação de Euler

$$r^2 v'' + r v' - n^2 v = 0$$

e, daí, que $v(r) = r^n$, com $n \in \mathbb{N}$ (e não $\mathbb{Z}$).

4. Em coordenadas esféricas, seja $(x, y, z) = f(r, \theta, \phi)$. Calcule sucessivamente:

$$(a) \text{ Jac } f = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{bmatrix}.$$

$$(b) \det(\text{Jac } f) = -r^2 \sin \phi.$$

$$(c) \text{ Jac}(f^{-1}) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ -\frac{\sin \theta}{r \sin \phi} & \frac{\cos \theta}{r \sin \phi} & 0 \\ \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} & \frac{\sin \theta \cos \phi}{r} & -\frac{\sin \phi}{r} \end{bmatrix}.$$

$$(d) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta \sin \phi) = \frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi}{r}.$$

Em seguida, deduza as expressões análogas para $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$, etc e complete os cálculos que levam a (4).

Referências

- [1] M. D. Maia. *Introdução aos Métodos da Física-Matemática*. Editora da UnB, Brasília, 2000.