

22. A Equação de Bessel

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

Nesta aula, utilizaremos o método de Frobenius para resolver a equação de Bessel de ordem $p \geq 0$,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \quad (1)$$

(A importância física dessa equação será discutida daqui a algumas aulas.)

Vimos na aula sobre o método de Frobenius que isso é possível, e esse método mostra como obter duas soluções LI a partir das raízes da equação indicial da equação de Bessel. Entretanto, uma vez que não demonstramos o Teorema de Frobenius, ao invés de nos contentarmos em simplesmente aplicá-lo, aproveitaremos a equação de Bessel para dar uma ilustração adicional de porque o método funciona.

Começamos reescrevendo a equação de Bessel de ordem $p \geq 0$ na forma

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2} y = 0.$$

Procurando uma solução do tipo

$$y(x) = |x|^t \sum_{k \geq 0} a_k x^k,$$

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

com $a_0 = 1$, temos para $x > 0$ que

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= tx^{t-1} \sum_{k \geq 0} a_k x^k + x^t \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1} \\
 &= x^{t-1} \left(\sum_{k \geq 0} t a_k x^k + \sum_{k \geq 1} k a_k x^k \right) \\
 &= x^{t-1} \sum_{k \geq 0} (t + k) a_k x^k, \\
 y''(x) &= (t-1)x^{t-2} \sum_{k \geq 0} (t+k) a_k x^k + x^{t-1} \sum_{k \geq 1} k(t+k) a_k x^{k-1} \\
 &= x^{t-2} \left(\sum_{k \geq 0} (t-1)(t+k) a_k x^k + \sum_{k \geq 1} k(t+k) a_k x^k \right) \\
 &= x^{t-2} \sum_{k \geq 0} ((t-1)(t+k) + k(t+k)) a_k x^k \\
 &= x^{t-2} \sum_{k \geq 0} (t+k)(t+k-1) a_k x^k.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y &= \\
 &= x^t \sum_{k \geq 0} (t+k)(t+k-1) a_k x^k + x^t \sum_{k \geq 0} (t+k) a_k x^k + (x^2 - p^2) x^t \sum_{k \geq 0} a_k x^k \\
 &= x^t \left(\sum_{k \geq 0} ((t+k)^2 - p^2) a_k x^k + \sum_{k \geq 0} a_k x^{k+2} \right) \\
 &= x^t \left(\sum_{k \geq 0} ((t+k)^2 - p^2) a_k x^k + \sum_{k \geq 2} a_{k-2} x^k \right) \\
 &= x^t \left((t^2 - p^2) a_0 + ((t+1)^2 - p^2) a_1 x + \sum_{k \geq 2} ((t+k)^2 - p^2) a_k + a_{k-2} x^k \right).
 \end{aligned}$$

Então, devemos ter:

- (i) $(t^2 - p^2)a_0 = 0$;
- (ii) $((t + 1)^2 - p^2)a_1 = 0$;
- (iii) $((t + k)^2 - p^2)a_k + a_{k-2} = 0$, para todo $k \geq 2$.

Uma vez que $a_0 = 1$, a igualdade (i) dá $t = \pm p$. Observe que $t^2 - p^2 = 0$ é precisamente a equação indicial da equação de Bessel em $x_0 = 0$. De fato, uma vez que as funções coeficientes são 1 e $x^2 - p^2$, tal equação é

$$t(t - 1) + 1 \cdot t + (0^2 - p^2) = 0,$$

isto é, $t^2 - p^2 = 0$.

Consideremos primeiramente o caso $t = p$, no qual (ii) e (iii) ficam reduzidos a

- (ii)' $((p + 1)^2 - p^2)a_1 = 0$;
- (iii)' $((p + k)^2 - p^2)a_k + a_{k-2} = 0$, para todo $k \geq 2$.

Como $p \geq 0$, o item (ii)' dá $a_1 = 0$. O item (iii)' equivale à recorrência

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k + 2p)}, \quad \forall k \geq 2.$$

A partir daí, é imediato que $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$. Também, recordando que $a_0 = 1$, temos da recorrência acima que $a_{2n} \neq 0$, para todo $n \geq 0$. Portanto, para $k = 2n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_0 \prod_{j=1}^n \frac{a_{2j}}{a_{2j-2}} = \prod_{j=1}^n \frac{-1}{2j(2j + 2p)} = \prod_{j=1}^n \frac{-1}{2^2 j(j + p)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1 + p)(2 + p) \dots (n + p)}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} y(x) &= x^t \sum_{k \geq 0} a_k x^k = x^p \left(a_0 + \sum_{n \geq 1} a_{2n} x^{2n} \right) \\ &= x^p \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1+p)(2+p) \dots (n+p)} \right). \end{aligned}$$

Se $x < 0$, a única diferença nos cálculos acima (verifique!) é que, ao final, chegaremos a

$$y(x) = (-x)^p \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1+p)(2+p) \dots (n+p)} \right). \quad (2)$$

Então, concluímos que, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o candidato a solução com $t = p$ é

$$y_p(x) := |x|^p \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1+p)(2+p) \dots (n+p)} \right). \quad (3)$$

A série de potências que define $\frac{y_p(x)}{|x|^p}$ converge exatamente onde convergir a série

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{2^{2n} n! (1+p)(2+p) \dots (n+p)}.$$

Pondo, para $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1+p)(2+p) \dots (n+p)},$$

temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_m}{c_{m+1}} \right| &= \frac{2^{2m+2} (m+1)! (1+p)(2+p) \dots (m+1+p)}{2^{2m} m! (1+p)(2+p) \dots (m+p)} \\ &= 4(m+1)(m+1+p) \xrightarrow{m} +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teste da razão, o raio de convergência é $+\infty$, e (3) realmente está definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Consideremos, agora, o caso $t = -p$, no qual as condições (ii) e (iii) tornam-se

$$(ii)'' \quad ((-p+1)^2 - p^2)a_1 = 0;$$

$$(iii)'' \quad ((-p+k)^2 - p^2)a_k + a_{k-2} = 0, \text{ para todo } k \geq 2.$$

Então,

$$(1 - 2p)a_1 = 0 \quad \text{e} \quad k(k - 2p)a_k + a_{k-2} = 0, \quad \forall k \geq 2.$$

Se $2p \notin \mathbb{Z}_+$ (trataremos o caso $2p \in \mathbb{Z}_+$ daqui a duas aulas), obtemos $a_1 = 0$ e

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k-2p)}, \quad \forall k \geq 2.$$

(Observe que $2p = p - (-p)$, de forma que a condição $2p \notin \mathbb{Z}_+$ é exatamente a condição, no enunciado do item (a) do Teorema de Frobenius, sobre as raízes da equação indicial.)

Essa recorrência é essencialmente a mesma do caso $t = p$ (bastando trocar p por $-p$), de sorte que nos dá a solução

$$y_{-p}(x) := |x|^{-p} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1-p)(2-p) \dots (n-p)} \right). \quad (4)$$

Argumentando como para (3), concluímos que y_{-p} está definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Observe também que y_p e y_{-p} são LI. Realmente, se existissem constantes não nulas a e b tais que $ay_p + by_{-p} = 0$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, teríamos

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ay_p(x) + by_{-p}(x)) = 0. \quad (5)$$

No entanto, uma vez que $0 \leq p \notin \mathbb{Z}_+ \Rightarrow p > 0$, as expressões para y_p e y_{-p} garantem que

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_p(x) = 0 \quad \text{mas} \quad \lim_{x \rightarrow 0} y_{-p}(x) = +\infty.$$

Tais limites, por sua vez, não são condizentes com (5).

Estudo & Problemas

1. Verifique a validade de (2) e os cálculos que levam a (4). Verifique também que, para $x \neq 0$, a série do segundo membro de y_{-p} é convergente.
2. A **equação de Bessel modificada** é a EDO de segunda ordem

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + p^2) y = 0,$$

em que $p \geq 0$ é um parâmetro real. Encontre sua forma normal e mostre que toda solução não trivial $y : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tem no máximo um zero.

3. Mostre que a equação de Bessel modificada (veja o problema anterior) possui uma solução $y : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$y(x) = x^p \sum_{k \geq 0} a_k x^k,$$

com $a_0 = 1$, e que tal função é positiva, crescente e estritamente convexa, com $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

4. Seja $y_p : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a solução não trivial da equação de Bessel de ordem $p \geq 0$ obtida no texto. Mostre que

$$\int_0^x t y_p(t)^2 dt = \frac{1}{2} (x^2 y_p'(x)^2 + (x^2 - p^2) y_p(x)^2).$$

(Sugestão: comece multiplicando a igualdade $x^2 y_p'' + x y_p' + (x^2 - p^2) y_p = 0$ por $2y_p'$ e integrando o resultado.)